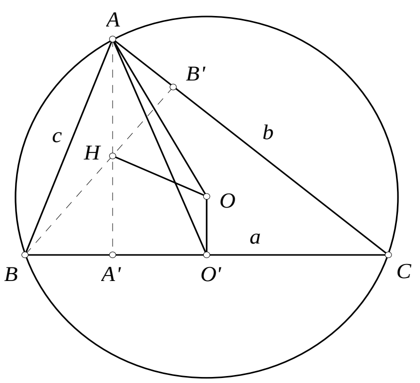
Problema 147.
Sean respectivamente *O* y *H* el circuncentro y el ortocentro del triángulo *ABC* (no degenerado).
a) Demostrar que no existe ningún triángulo acutángulo tal que la longitud de una de sus medianas sea igual a la distancia *OH*:
b) Caracterizar, si existen, los triángulos tales que la longitud de dos de sus medianas sea igual a la distancia *OH*.

Solución.
a) Razonemos sobre el vértice *A*. Suponiendo que el triángulo es acutángulo, sea *R* el radio del círculo circunscrito. Como *H* es interior al riángulo, se tiene claramente $OH < OA = R$.



Si *A*' es el pie de la altura que parte de *A* y *O*' es la proyección de *O* sobre el lado *a*, en el cuadrilátero *AA'O'O* los ángulos $\angle A'AO$ y $\angle AOO'$ son suplementarios luego $\angle AOO'$ es obtuso y la mediana *AO*' es mayor o igual que *OA*.
Por tanto $OH < OA < AO'$ y de modo análogo se razona para los otros vértices.
Además si *B*' es el pie de la altura que parte de *B*, en el triángulo *ABB*' se tiene $AB' = c\cdot\cos A$ y en el triángulo *AHB*' $AB' = AH\cdot\text{sen}\, C$ de donde

$$AH = \frac{c}{senC}\cos A = 2R\cos A$$

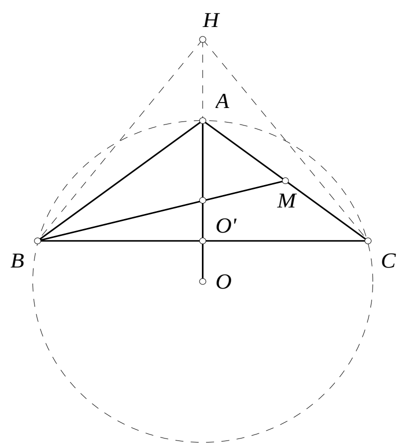
como en el triángulo *OO'C* resulta que $OO' = R\cos A$, entonces concluimos

$$AH = 2OO' \quad (*).$$

b) Supongamos que las dos medianas cuya medida es *OH* son las que parten de los vértices *B* y *C*, entonces

$$\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4} = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4} \Rightarrow b = c$$

Por todo lo expuesto un triángulo que cumpla los requisitos del apartado b) ha de ser isósceles y con el ángulo desigual obtuso.
Si llamamos *M* al punto medio de *AC*, la construcción del triángulo solución es inmediata a partir de (*) y de *BM* = *OH*.
Basta partir del segmento *OA*, situar *O*' de modo que $OA = 4OO'$, trazar la circunferencia de centro *O* y radio *OA*, y por el punto *O*' la perpendicular a *OA* determina sobre la circunferencia los vértices *B* y *C*.



Tomando *R* = 1, es fácil establecer que $\tan B = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Los triángulos quedan caracterizados como isósceles con ángulo desigual $B = \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI