

Problema 149. Solución de Roberto Bosch Cabrera, Ciudad de la Habana, Cuba.

Calcular

$$I = \int_1^{\infty} \frac{x^n}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^n}{n!}} dx$$

$$I = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{x^n}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^n}{n!}} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[n! \ln \left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^n}{n!} \right) - n!x \right] \Big|_1^M$$

$$I = n! \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\ln \left(e^M - 1 - M - \frac{M^2}{2!} - \dots - \frac{M^n}{n!} \right) - M \right] + n! - n! \ln \left(e - 1 - 1 - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{n!} \right)$$

Sea $a_M = \ln \left(e^M - 1 - M - \frac{M^2}{2!} - \dots - \frac{M^n}{n!} \right) - M$ entonces:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} a_M = \lim_{M \rightarrow \infty} \ln(e^{a_M}) = \ln \left(\lim_{M \rightarrow \infty} e^{a_M} \right)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} e^{a_M} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{e^M - 1 - M - \frac{M^2}{2!} - \dots - \frac{M^n}{n!}}{e^M} = 1$$

De donde $\lim_{M \rightarrow \infty} a_M = \ln 1 = 0$.

Finalmente

$$I = n! - n! \ln \left(e - 1 - 1 - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{n!} \right) = n! \ln \left(\frac{e}{e - 1 - 1 - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{n!}} \right)$$

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoid/>

Edita:

