Problema 8 (Revista OIM No. 2)
Un cuadrilátero variable $ABCD$ tiene el lado AB fijo, el lado CD, de longitud constante, gira alrededor del punto de intersección de CD y AB. Hallar el lugar geométrico del punto P de intersección de AC y BD.

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela.

Sea O el punto de intersección de CD y AB. Sea Q el punto en el cual la paralela a CD por P intersecta a la recta AB. Entonces el lugar geométrico de P es la circunferencia K' de centro Q homotética de la circunferencia K de centro O en la que gira el punto C, con A como centro de homotecia. En efecto, pongamos $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$, $d = OD$,

$$t = \frac{AP}{AC} = \frac{QP}{OC}, \quad s = \frac{BP}{BD} = \frac{QP}{OD}.$$

Entonces

$$s/t = \frac{OC}{OD} = \frac{c}{d}.$$

Anlogamente

$$1 - t = \frac{AC - AP}{AC} = \frac{PC}{AC} = \frac{OQ}{OA},$$

$$1 - s = \frac{BD - BP}{BD} = \frac{PD}{BD} = \frac{OQ}{OB},$$

de donde

$$\frac{1-t}{1-s} = \frac{OB}{OA} = \frac{b}{a}.$$

Por lo tanto

$$1 - t = \frac{b}{a}(1 - s) = \frac{b}{a}(1 - \frac{ct}{d}),$$

de donde se despeja

$$t = \frac{(b-a)d}{bc - ad}.$$

Como al girar CD la razón $t = AP/AC$ se mantiene constante (pues sólo depende de a, b, c y d), el lugar pedido es la la circunferencia K' homotética de la circunferencia K de centro O en la que gira C, con A como centro de homotecia. Puesto que la razón de esta homotecia es t y $t = QA/OA$, el punto Q permanece fijo y es el centro de K'.
Nota: Cuando CD es colineal con AB el punto P no está bien definido, pero los puntos de intersección de K' con la recta AB son los límites de P cuando $\angle AOC$ tiende a $0°$ o a $180°$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI