

Problema (Revista OIM No. 9)

Dados cuatro puntos A, B, C, M , ¿es posible determinar una cónica que pase por M y respecto de la cual el triángulo ABC sea autopolar?

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela. Hay infinitas cónicas que pasan por M y respecto a las cuales el triángulo ABC es autopolar.

Supongamos en primer lugar que una tal cónica K exista. Tracemos las rectas AM y BM y sean $X = AM \cdot BC$ (intersección de AM con BC) y $Y = BM \cdot AC$. Tracemos la recta XY y sea $W = XY \cdot AB$. Por una conocida propiedad de los cuadrivértices completos (en este caso el $BCYW$) se tiene que $N = WC \cdot AM$ es el conjugado armónico de M respecto al par A, X . Por lo tanto, siendo BC la polar de A , N debe pertenecer a K . Sea ahora $P = WC \cdot BM$. Proyectando la cuaterna armónica $MNXA$ desde W y seccionando con la recta BM resulta que la cuaterna $MPYB$ también es armónica y por lo tanto P pertenece a K . Del mismo modo proyectando $MNXA$ desde B y seccionando con la recta CM resulta la cuaterna armónica $MQCZ$ y por lo tanto $Q = CM \cdot BN$ pertenece a K . En resumen hemos probado que cualquier cónica que pase por M y respecto a la cual el triángulo ABC sea autopolar, debe contener a los puntos N, P y Q .

Ahora bien, hay infinitas cónicas que pasan por los puntos M, N, P y Q (pues hacen falta cinco puntos para determinar una cónica). Sea K una cualquiera de ellas. Como la cuaterna que se obtiene proyectando $MPYB$ desde A y cortando con CM es armónica, se deduce que A, Q y P están alineados. Si $U = AC \cdot BN$ y $V = AP \cdot BC$ entonces es fácil ver que las cuaternas $NQUB$ y $PQVA$ también son armónicas. Además, del hecho de que $PQVA$ y $MNXA$ sean armónicas se sigue que la recta XV (que es la misma BC) es la polar del punto A respecto a K . Análogamente como $NQUB$ y $MPYB$ son armónicas se sigue que la recta AC es la polar de B respecto a K . En consecuencia también AB es la polar de C y el triángulo ABC es autopolar.

Lo anterior vale aún si M pertenece a uno de los lados del triángulo ABC (pero no si es igual a uno de los vértices). Por ejemplo si M está en la recta AB entonces ABC es autopolar respecto a cualquier cónica que pase por M y por su conjugado armónico N respecto de A, B , siendo además tangente a las rectas MC y NC en M y N , respectivamente.

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoidm/>

Edita:

