Problema 12 (Revista OIM No. 3)
Si $a+b+c+d=0$, $a^2+b^2+c^2+d^2=0$, probar que

$$a^8+b^8+c^8+d^8=\frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4+d^4)$$

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela.

Lo que afirma el enunciado no es cierto. Como contraejemplo tomemos $a=1$, $b=-1$, $c=i$, $d=-i$. Entonces $a+b+c+d=1-1+i-i=0$, $a^2+b^2+c^2+d^2=1+1-1-1=0$, $a^4+b^4+c^4+d^4=1+1+1+1=4$ y $a^8+b^8+c^8+d^8=4$.

Sin embargo se cumple que

$$a^8+b^8+c^8+d^8=\frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4+d^4)^2$$

(que tal vez era el enunciado original del problema y por error no se incluyó el último exponente). Esto se puede probar fácilmente utilizando las relaciones entre las funciones simétricas elementales y las sumas de potencias, establecidas por Newton. Específicamente, definamos

$$\begin{aligned} e_1 &= a+b+c+d, \quad e_2=ab+ac+ad+bc+bd+cd, \\ e_3 &= abc+abd+acd+bcd, \quad e_4=abcd, \\ p_k &= a^k+b^k+c^k+d^k. \end{aligned}$$

Entonces las relaciones de Newton afirman que

$$ke_k=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}p_je_{k-j}.$$

En nuestro caso se tiene $e_1=p_1=p_2=0$. Aplicando las relaciones de Newton para $k=2$ y $k=4$ resulta

$$\begin{aligned} 2e_2 &= p_1e_1-p_2=0, \qquad \text{por tanto } e_2=0, \\ 4e_4 &= p_1e_3-p_2e_2+p_3e_1-p_4=-p_4, \qquad \text{por tanto } p_4=-4e_4. \end{aligned}$$

Como $e_k=0$ para $k>4$ se tiene además

$$\begin{aligned} 0 &= 5e_5=p_1e_4-p_2e_3+p_3e_2-p_4e_1+p_5=p_5, \qquad \text{por tanto } p_5=0, \\ 0 &= 8e_8=p_1e_7-p_2e_6+p_3e_5-p_4e_4+p_5e_3-p_6e_2+p_7e_1-p_8=-p_4e_4-p_8, \end{aligned}$$

de donde $p_8=-p_4e_4=p_4^2/4=4e_4^2$, es decir

$$a^8+b^8+c^8+d^8=\frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4+d^4)^2=4(abcd)^2.$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: