Problema 15 (Revista OIM No. 3)
Demostrar que

$$\sec^4\frac{\pi}{7}+\sec^4\frac{2\pi}{7}+\sec^4\frac{2\pi}{7}=416.$$

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela.
Sea k un entero impar. Entonces

$$\cos\frac{3k\pi}{7}=4\cos^3\frac{k\pi}{7}-3\cos\frac{k\pi}{7}.$$

Pero por otro lado

$$\begin{aligned}\cos\frac{3k\pi}{7} &= \cos(k\pi-\frac{4k\pi}{7})=-\cos\frac{4k\pi}{7}=1-2\cos^2\frac{2k\pi}{7}\\ &= 1-2(2\cos^2\frac{k\pi}{7}-1)^2=-8\cos^4\frac{k\pi}{7}+8\cos^2\frac{k\pi}{7}-1,\end{aligned}$$

y resulta que

$$8\cos^4\frac{k\pi}{7}+4\cos^3\frac{k\pi}{7}-8\cos^2\frac{k\pi}{7}-3\cos\frac{k\pi}{7}+1=0.$$

Por lo tanto $\cos\pi/7$, $\cos 3\pi/7$, $\cos 5\pi/7$ y $\cos 7\pi/7=-1$ son raíces del polinomio

$$8x^4+4x^3-8x^2-3x+1$$

Si lo dividimos entre $(x+1)$ resulta

$$P(x)=8x^3-4x^2-4x+1,$$

cuyas raíces son $\cos\pi/7$, $\cos 3\pi/7$ y $\cos 5\pi/7=-\cos 2\pi/7$. Los recíprocos de estas cantidades, es decir $x_1=\sec\pi/7$, $x_2=\sec 3\pi/7$ y $x_3=-\sec 2\pi/7$, son las raíces del polinomio

$$x^3P(\frac{1}{x})=x^3-4x^2-4x+8.$$

Por las fórmulas de Vieta se tiene

$$x_1+x_2+x_3=4,\quad x_1x_2+x_2x_3+x_1x_2=-4,\quad x_1x_2x_3=-8,$$

de donde

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_2)=24,$$

y finalmente

$$\begin{aligned}&\sec^4\frac{\pi}{7}+\sec^4\frac{2\pi}{7}+\sec^4\frac{2\pi}{7}=x_1^4+x_2^4+x_3^4\\ &=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_2)^2+4x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=416.\end{aligned}$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI