

PROBLEMA 151, propuesto por el editor (cuando se publique la solución se dará cuenta de su procedencia; el problema no es nuevo)

El triángulo  $ABC$  es acutángulo y no isósceles. La bisectriz del ángulo agudo entre las alturas desde  $A$  y  $C$  corta al lado  $AB$  en  $P$  y al lado  $BC$  en  $Q$ . La bisectriz interior del ángulo  $B$  corta en  $R$  a la recta que une el ortocentro  $H$  con el punto medio  $M$  del lado  $AC$ .

Demostrar que los puntos  $B, P, R, Q$  están en una circunferencia.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $A > C$ . Es fácil comprobar que el triángulo  $PBQ$  es isósceles en  $Q$ . Para ello, considérese que el ángulo agudo formado por las alturas desde  $A$  y desde  $C$  es igual a  $B$ , pues el ángulo formado por la altura desde  $A$  y el lado  $AB$  es  $\frac{\pi}{2} - B$ , siendo recto el ángulo entre la altura desde  $C$  y el lado  $AB$ . De forma similar, las alturas desde  $A$  y  $B$  se cortan en un ángulo igual a  $C$ , y las alturas desde  $B$  y  $C$  se cortan en un ángulo igual a  $A$ . Entonces,  $PQ$  forma con la altura desde  $B$  un ángulo igual a  $C + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A-C}{2}$ , con lo que al formar la altura desde  $B$  un ángulo igual a  $\frac{\pi}{2} - C$  con el lado  $BC$ , se tiene que  $PQ$  forma con el lado  $BC$  un ángulo igual a  $\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A-C}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - C\right) = \frac{A+C}{2}$ . De forma análoga se demuestra que éste es también el ángulo que forman  $PQ$  con el lado  $AB$ .

Al ser  $PBQ$  isósceles en  $B$ , la bisectriz del ángulo  $B$  coincide con un diámetro de la circunferencia circunscrita a  $PBQ$ , cortándola nuevamente en  $S$ . Llamando  $T$  al punto donde la altura desde  $B$  corta de nuevo a la circunferencia circunscrita a  $PBQ$ , y  $E$  al pie de la altura desde  $B$  sobre  $AC$ , demostraremos que los triángulos  $THS$  y  $EHM$  son semejantes, lo cuál solucionará el problema, ya que entonces  $S$  estará sobre la recta  $HM$  y sobre la bisectriz de  $B$ , coincidiendo por lo tanto con  $R$ , y estando sobre la misma circunferencia que  $B, P, Q$ . Para demostrar que ambos triángulos son semejantes, vemos en primer lugar que  $\angle HEM = \angle HTS = \frac{\pi}{2}$ , pues  $\angle HTS = \angle BTS$ , y  $BS$  es por definición diámetro de la circunferencia circunscrita a  $PBQ$ . Además, es conocido (o fácilmente demostrable por el lector) que  $HE = 2r \cos A \cos C$ , donde  $r$  es el radio de la circunferencia circunscrita a  $ABC$ , y se tiene fácilmente que

$$EM = \frac{b}{2} - c \cos A = \frac{a \cos C - c \cos A}{2} = r \sin(A - C),$$

donde se ha usado que  $b = a \cos C + c \cos A$ , y se ha aplicado el teorema del seno. Como además  $\angle EBS = \frac{B}{2} - \angle ABE = \frac{A-C}{2}$ , entonces  $TS = 2\rho \sin \frac{A-C}{2}$ , siendo  $\rho$  el radio de la circunferencia circunscrita a  $PBQ$ . Ahora bien, utilizando el teorema del seno,

$$HT = \frac{PT \sin(\angle HPT)}{\sin(\angle PHT)} = \frac{2\rho \sin(\angle PBT) \sin(\angle QBT)}{\sin(\angle QHT)} = \frac{2\rho \cos A \cos C}{\sin\left(C + \frac{B}{2}\right)},$$

y como  $C + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A-C}{2}$ , entonces  $\frac{HT}{HE} = \frac{TS}{EM}$ , y hemos terminado.

# Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

[http://www.campus-oei.org/oim/revista\\_oim/](http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/)

Edita:

