Problema 151

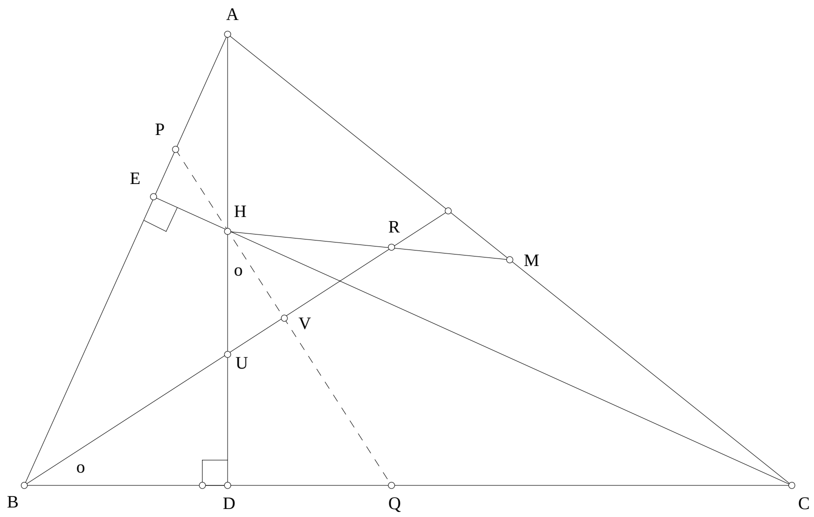
Solución de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

Vamos a demostrar que $RQ \perp BC$. Un razonamiento análogo al que seguiremos sirve para probar que $RP \perp AB$.

El cuadrilátero $PBQR$ tendrá, así, rectos dos ángulos opuestos lo cual es suficiente para asegurar que es inscriptible (en la circunferencia de diámetro BR).

Sean D y E los pies de las alturas desde los vértices A y C, respectivamente.

Sean U y V los respectivos puntos de intersección de la bisectriz interior del ángulo B con la altura desde A y con la bisectriz del ángulo agudo entre las alturas desde A y C.



Los ángulos ABD y AHE son iguales, al ser ambos complementarios de $\angle BAD$. También son iguales $\angle AHE$ y $\angle CHD$, por ser opuestos por el vértice. Por tanto, $\angle ABD = \angle CHD$ y, consiguientemente,

$$\angle UBD = \frac{1}{2}\angle ABD = \frac{1}{2}\angle CHD = \angle UHV$$

Se sigue que los triángulos UBD y UHV son semejantes y, siendo rectángulo (en D) el primero, también lo es el segundo con $\angle UVH = 90^{\circ}$, esto es, la bisectriz interior del ángulo B corta perpendicularmente a la bisectriz del ángulo agudo entre las alturas desde A y C.

Consideramos un sistema de coordenadas con BC como eje de abscisas y AD como eje de ordenadas y ponemos $A(0,a)$, $B(b,0)$ y $C(c,0)$.

Se obtienen inmediatamente la ecuación de la bisectriz interior del ángulo B

$$ax+\left(b-\sqrt{a^2+b^2}\right)y=ab \tag{1}$$

y las coordenadas del ortocentro $H\left(0,-\dfrac{bc}{a}\right)$.

La ecuación de la recta PQ, habida cuenta que es perpendicular a (1) y que pasa por H es

$$y+\frac{bc}{a}=\frac{b-\sqrt{a^2+b^2}}{a}x$$

en la cual sustituimos $y=0$ para obtener el valor de la abscisa del punto Q,

$$x_Q=\frac{bc}{b-\sqrt{a^2+b^2}}$$

La recta HM, habida cuenta que las coordenadas del punto M son $\left(\dfrac{c}{2},\dfrac{a}{2}\right)$ tiene ecuación

$$y+\frac{bc}{a}=\frac{a^2+2bc}{ca}x \tag{2}$$

Eliminamos y entre (1) y (2) y obtenemos el valor de la abscisa del punto R, a saber

$$x_R=\frac{bc\left(c-b-\sqrt{a^2+b^2}\right)}{a^2+bc-c\sqrt{a^2+b^2}}$$

Multiplicamos numerador y denominador por $b-\sqrt{a^2+b^2}$ y simplificamos, el resultado es

$$x_R=\frac{bc}{b-\sqrt{a^2+b^2}}$$

Siendo iguales las abscisas de los puntos Q y R, la recta QR es perpendicular a BC, como queríamos demostrar, pues BC es el eje de abscisas.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: