Problema 25 (Revista OIM No. 5)

Un avión de la compañía *Air Disaster* debe realizar un viaje entre dos ciudades con un total de $m+n$ escalas. En cada escala, el avión ha de cargar o descargar una tonelada de una cierta mercancía; realiza cargas en m de las escalas y descargas en las n restantes. En la compañía, nadie ha reparado en que el avión no soporta una carga mayor que k toneladas ($n < k < m+n$) y las escalas de carga y descarga están distribuidas al azar. Si el avión sale con n toneladas de la mercancía, calcular la probabilidad de que llegue a su destino.

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela.

Modelemos cada posible secuencia de cargas y descargas mediante una poligonal de vértices $(0, x_0)$, $(1, x_1)$,…,$(m+a, x_{m+n})$, donde $x_0 = n$ y $x_{i+1} = x_i + 1$ o $x_{i+1} = x_i - 1$ según que en la escala i se cargue o se descargue mercancía, respectivamente. La poligonal finaliza en $(m+n, m)$, y el avión llega a su destino si y sólo si la poligonal se mantiene estrictamente por debajo de la recta $y = k+1$. La probabilidad buscada es el cociente entre el número de poligonales que no tocan esa recta y el total de poligonales, que es $\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$, ya que la poligonal queda determinada si se especifica en cuáles de las $m+n$ escalas se realizan las n descargas.

Si $m > k$ es claro que todas las poligonales de $(0, n)$ a $(m+n, m)$ tocan la recta $y = k+1$ y la probabilidad buscada es 0. Supongamos entonces que $m \leq k$. Para calcular el número de poligonales que no tocan la recta $y = k+1$ utilizamos el llamado *principio de reflexión*, que afirma que el número de poligonales que van de $(0, n)$ a $(m+n, m)$ *tocando* la recta $y = k+1$ es igual al número total de poligonales que van de $(0, n)$ al punto simétrico de $(m+n, m)$ respecto a la recta $y = k+1$, es decir $(m+n, 2(k+1) - m)$ (esto se prueba simetrizando respecto a la recta $y = k+1$, para cada poligonal de $(0, n)$ a $(m+n, m)$ que toque esa recta, la porción que va desde el primer vértice de contacto hasta el último vértice de la poligonal).

Como las poligonales que van de $(0, n)$ a $(m+n, 2(k+1) - m)$ son $\binom{m+n}{k+1}$, la probabilidad buscada es

$$\frac{\binom{m+n}{n} - \binom{m+n}{k+1}}{\binom{m+n}{n}} = 1 - \frac{\binom{m+n}{k+1}}{\binom{m+n}{n}} = 1 - \frac{m!n!}{(k+1)!(m+n-k-1)!}.$$

Nota: Más detalles sobre caminatas al azar y el principio de reflexión pueden encontrarse en el clásico libro de William Feller *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones*, vol. I, Editorial Limusa, México.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI