Competición Matemática Mediterránea 2008
Memorial Peter O'Halloran
Requena, 3 de mayo de 2008

Problema 1
Sea (c_a) el círculo exinscrito de centro I_a, que es tangente al lado BC del triángulo ABC en el punto D, y a las prolongaciones de los lados AC y AB en los puntos E y Z, respectivamente. Si la recta ED es perpendicular al lado AB, cortándolo en H, y la recta ZF es la perpendicular desde Z a la recta HI_a, cortándola en F, calcular los ángulos $\widehat{BFD}$ y $\widehat{AFE}$.

Problema 2
Sean p y q enteros no nulos. Se supone que la ecuación

$$y^4 + 2\,(2p-1)\,y^2 + 8qy - (4p-1) = 0 \qquad (1)$$

tiene una raíz entera, de signo contrario al de q. Demostrar que la ecuación

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (2)$$

tiene al menos una raíz irracional.

Problema 3
La cuaterna $(a;b;c;d)$ de enteros positivos se dice "interesante" si los números

$$a^2; b^2; c^2; d^2 + 1$$

son, en este orden, términos consecutivos de una progresión aritmética creciente.
a) Encontrar, al menos, una cuaterna interesante.
b) Decidir, razonadamente, si el número de todas las cuaternas interesantes es finito o infinito.

Problema 4
Supongamos que los números reales x, y, z pertenecen al intervalo $[0,1)$ y verifican $x+y+z=1$.
Demostrar que

$$\sqrt{\frac{xy}{z+xy}} + \sqrt{\frac{xz}{y+xz}} + \sqrt{\frac{yz}{x+yz}} \le \frac{3}{2}.$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI