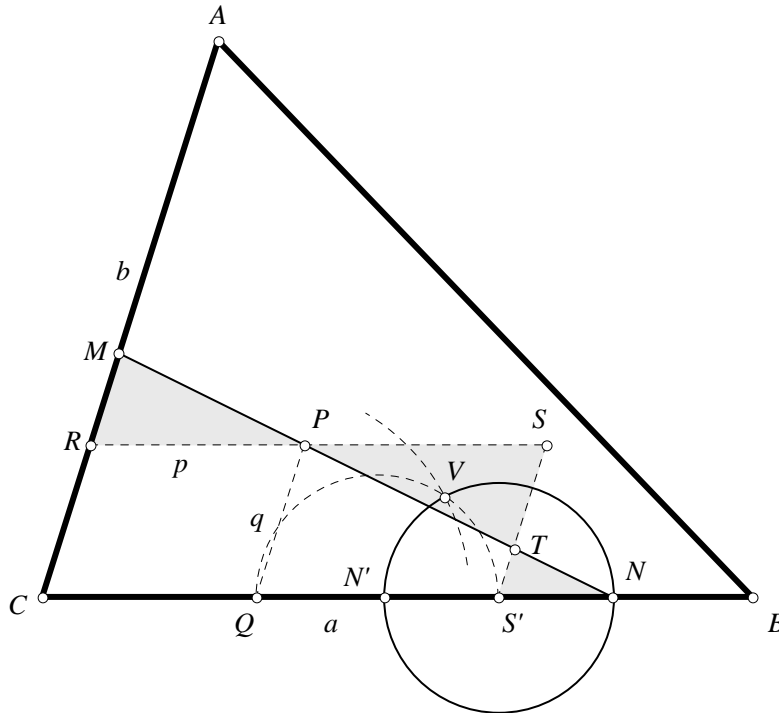


Problema 152

Dado un triángulo ABC y un punto P situado en su interior, trazar una recta MN , con M en el lado AC y N en el lado BC , que pasando por P divida al triángulo en dos partes que estén en una proporción dada.

Solución.

Denotaremos por $[XYZ..]$ el área de polígono de vértices $XYZ..$ y sea k tal que $\frac{[CMN]}{[ABC]} = k$.



Suponiendo el problema resuelto, la posición de P queda fijada mediante las proyecciones paralelas a CA y CB en R y Q respectivamente. Pongamos finalmente $p = PR$, $q = PQ$ y $x = CN$, $y = CM$.

En términos de las incógnitas x , y las dos condiciones del enunciado se expresan:

$$\frac{1}{2}xy\text{sen}C = \frac{1}{2}k\text{ab}\text{sen}C \Leftrightarrow xy = kab \quad (1)$$

para la relación de las áreas y por la semejanza de PQN y MRP

$$\frac{x-p}{q} = \frac{p}{y-q} \Rightarrow qx + py = xy = kab \quad (2)$$

para expresar la alineación de P con M y N .

Formalmente el problema está resuelto como intersección de la hipérbola (1) con la recta (2) sujeto a las restricciones $x \leq a$, $y \leq b$ inherentes al problema.

Para poder resolverlo de modo geométrico comenzaremos por construir un paralelogramo $CRSS'$ con dos vértices fijos C, R cuya área sea la del triángulo CMN ($k[ABC]$) y cuyos lados tengan las direcciones de los lados CB y CA del triángulo como indica la figura.

La construcción del punto S es inmediata sabiendo que

$$q \cdot RS \cdot \text{sen}C = k \frac{1}{2} ab \cdot \text{sen}C \Leftrightarrow RS = \frac{kab}{2q}$$

(esta construcción se omite para no cargar dibujo).

Finalmente determinaremos M y N con la condición $[PST] = [PRM] + [TS'N]$.

Como los tres triángulos son semejantes y la razón de las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza, dividiendo la relación anterior por $[PST]$ tenemos

$$1 = \frac{[PRM]}{[PST]} + \frac{[TS'N]}{[PST]} \Leftrightarrow 1 = \frac{PR^2}{PS^2} + \frac{S'N^2}{PS^2} \Leftrightarrow PS^2 = PR^2 + S'N^2$$

queda una sencilla construcción de un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa ($PS = QS'$) y un cateto ($PR = QC$).

La semicircunferencia de diámetro QS' y la circunferencia de centro Q y radio QC se cortan en el punto V interior al triángulo.

Finalmente la circunferencia de centro S' y radio $S'V$ corta al lado CB en los puntos N y N' que unidos con P determinan M y M' en el lado AC .

La discusión es inmediata. Cada solución exige que el punto N o N' esté en el segmento CB y que su correspondiente punto M o M' este en el segmento AC .

En la figura sólo se ha dibujado completa la solución correspondiente al punto N para un valor de k de 0,35.

En términos de los datos un simple cálculo establece que existe solución cuando cumplen la condición

$$1 - \frac{q}{kb} \leq \frac{p}{a} \leq k \left(1 - \frac{q}{b} \right)$$

la desigualdad de la derecha garantiza que el punto N está en el segmento CB y la de la derecha que M pertenece al segmento AC .

De modo análogo se puede analizar la condición para N' y M' .

Cristóbal Sánchez-Rubio
I.E.S. Penyagolosa, Castellón.

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/

Edita:

