Problema 156, propuesto por Ovidio Furdui, Toledo (OH, USA).
Sea f una función tal que

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad \text{para } |x| < R$$

donde $T_n(x)$ es el polinomio de Taylor de grado n en 0. Hallar la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(f(x) - T_n(x)).$$

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela. Supongo que en el enunciado, antes de "para $|x| < R$", falta la condición $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ u otra equivalente, ya que de lo contrario la serie propuesta podría no converger (tómese por ejemplo como f la función de Cauchy).

Entonces

$$\sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n-1}(f(x) - T_n(x)) = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^n T_n(x),$$

y como $T_{2r} - T_{2r-1} = f^{(2r)}(0)x^{2r}/(2r)!$ nos queda

$$\sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n-1}(f(x) - T_n(x)) = \sum_{r=1}^{k} \frac{x^{2r}}{(2r)!} f^{(2r)}(0).$$

Ahora bien, como para $|x| < R$ se tiene

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0),$$

también se cumple

$$f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} f^{(n)}(0),$$

y promediando resulta

$$\frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) - f(0) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^{2r}}{(2r)!} f^{(2r)}(0) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n-1}(f(x) - T_n(x)).$$

Y como para $|x| < R$ se tiene $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, resulta finalmente que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(f(x) - T_n(x)) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) - f(0).$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: