PROBLEMA 157, *propuesto por Ovidiu Furdui, Toledo (OH,USA).*

Sea k un número real positivo. Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left\{\frac{n}{x}\right\}^k dx,$$

donde $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$ es la parte fraccionaria del número real a.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Hallamos en primer lugar el valor para $k = 1$. Para ello, tomemos la integral entre $\frac{1}{N}$ y 1, y dejemos que N tienda a infinito de forma independiente a n. Expresando el intervalo de integración $\left(\frac{1}{N}, 1\right]$ como la unión disjunta de subintervalos de la forma $\left(\frac{n}{m+1}, \frac{n}{m}\right]$, es claro que la parte entera de $\frac{n}{x}$ es constante en cada subintervalo, y es igual a m, con lo que

$$\int_{\frac{1}{N}}^1 \left\{\frac{n}{x}\right\} dx = \sum_{m=n}^{nN-1}\int_{\frac{n}{m+1}}^{\frac{n}{m}}\left(\frac{n}{x}-m\right)dx = n\sum_{m=n}^{nN-1}\ln\frac{m+1}{m} - n\sum_{m=n}^{nN-1}\frac{n}{m+1} =$$

$$= n\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}-\ln n\right) - n\left(\sum_{m=1}^{nN}\frac{1}{m}-\ln(nN)\right).$$

Ahora bien, como cuando M tiende a infinito se tiene que

$$\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m} = \ln M + \gamma + \frac{1}{2M} + O\left(\frac{1}{M^2}\right),$$

entonces cuando n y N tienden a infinito, se tiene que

$$\int_{\frac{1}{N}}^1 \left\{\frac{n}{x}\right\}^k dx = n\gamma + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) - n\gamma - O\left(\frac{1}{N}\right),$$

que obviamente tiende a $\frac{1}{2}$ cuando n y N tienden a infinito, con lo que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left\{\frac{n}{x}\right\} dx = \frac{1}{2}.$$

Retomamos ahora el caso general para un valor cualquiera de k, y realizamos la división del intervalo de integración en subintervalos de la forma $\left(\frac{n}{m+1}, \frac{n}{m}\right]$, para después realizar el cambio de variable $y = \frac{n}{x} - m$, con lo que $dx = -\frac{ndy}{(y+m)^2}$ en cada intervalo, obteniéndose que

$$\int_0^1 \left\{\frac{n}{x}\right\}^k dx = \sum_{m=n}^{\infty}\int_{\frac{n}{m+1}}^{\frac{n}{m}}\left(\frac{n}{x}-m\right)^k dx = n\sum_{m=n}^{\infty}\int_0^1\frac{y^k dy}{(y+m)^2}.$$

Nótese entonces que, llamando I_m a la integral del último término, se tiene que

$$\frac{1}{(k+1)m^2} = \int_0^1\frac{y^k dk}{m^2} > I_m > \int_0^1\frac{y^k dk}{(m+1)^2} = \frac{1}{(k+1)(m+1)^2},$$

con lo que

$$\frac{n}{k+1}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{m^2} > \int_0^1\left\{\frac{n}{x}\right\}^k dx > \frac{n}{k+1}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m^2}.$$

Esto concluye el problema, ya que por una parte se constata fácilmente que la diferencia entre las cotas superior e inferior es $\frac{1}{n(k+1)}$, que claramente tiende a cero al tender n a infinito, con lo que el límite pedido es igual al límite de cualquiera de las dos cotas, mientras que por otra parte, salvo el factor de $\frac{1}{k+1}$, las cotas no dependen de k, con lo que el límite es de la forma $\frac{A}{k+1}$, donde A es una constante que no depende de k, y por comparación con el caso $k = 1$ se encuentra fácilmente que $A = 1$. Luego el valor del límite pedido es $\frac{1}{k+1}$ para todo real positivo k.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: