PROBLEMA 158, *propuesto por José Hernández Santiago, Oaxaca, México.*

A, **B** y **C** son preguntados sobre el carácter de la serie

$$1 - \frac{1}{2^{2008}} + \frac{1}{3^{2008}} - \frac{1}{4^{2008}} + \dots$$

La persona **A** afirma que la serie es convergente y que su suma es un número irracional. La persona **B** concuerda con A en que es convergente, pero afirma que la suma es racional. Finalmente, el individuo **C** asegura que tanto **A** como **B** están equivocados y que la serie ni siquiera es convergente. Un cuarto individuo que pasaba por allí les recomienda solicitar el consejo de los lectores de la Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemticas.

Suponga que ellos hacen caso de esta sugerencia. Cuál sería su dictamen, estimado lector?

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Demostraremos que **A** tiene razón y que las otras dos personas se equivocan. De hecho, iremos más allá y demostraremos que el valor de la suma es trascendente. Para ello, utilizaremos el siguiente resultado, relativamente conocido (ver por ejemplo por ejemplo http://planetmath.org/?op=getobj&from=objects&id=10235 para una demostración):

$$\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}B_{2n}}{(2n)!},$$

donde $\zeta(x)$ es la función zeta de Riemann y B_n son los números de Bernoulli, definidos respectivamente como

$$\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^\infty \frac{u^{x-1}du}{e^u - 1} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^x}, \qquad \frac{u}{e^u - 1} = \sum_{m=0}^\infty \frac{B_m u^m}{m!},$$

donde la segunda definición de la función zeta es conclusión de la primera cuando x es entero positivo.

Demostraremos que los números de Bernoulli son racionales, quedando entonces demostrado que $\zeta(2008)$ es un múltiplo racional no nulo de una potencia entera de π, es decir, que $\zeta(2008)$ es trascendente. La demostración de que los números de Bernoulli son racionales es relativamente sencilla por inducción, ya que se comprueba fácilmente que $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, y en general,

$$B_n = \left.\left(\frac{d^n}{du^n}\frac{u}{e^u - 1}\right)\right|_{u\to 0},$$

donde la notación indica que la expresión entre paréntesis ha de ser evaluada en el límite cuando u tiende a 0. Luego para todo $N \geq 2$,

$$\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}B_n = \sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}\left.\left(\left(\frac{d^n}{du^n}\frac{u}{e^u - 1}\right)\left(\frac{d^{N-n}e^u}{du^{N-n}}\right)\right)\right|_{u\to 0} =$$

$$= \left.\left(\frac{d^N}{du^N}\frac{ue^u}{e^u - 1}\right)\right|_{u\to 0} = \left.\left(\frac{d^N u}{du^N}\right)\right|_{u\to 0} + \left.\left(\frac{d^N}{du^N}\frac{u}{e^u - 1}\right)\right|_{u\to 0} = 0 + B_N,$$

de donde para $N \geq 2$, se cumple $\sum_{n=0}^{N-1}\binom{N}{n}B_n$. Podemos entonces expresar cada B_{N-1} para $N \geq 2$ como combinación lineal, con coeficientes racionales, de los B_n con $n \in \{0, 1, \dots, N-2\}$, y al ser B_0 y B_1 racionales, todos los B_n son racionales, con lo que concluye la demostración de que $\zeta(2008)$ es trascendente. Ahora bien, llamando S a la suma que se está estudiando, se tiene que

$$\zeta(2008) - S = \frac{2}{2^{2008}} \left(1 + \frac{1}{2^{2008}} + \frac{1}{3^{2008}} + \dots\right) = \frac{2\zeta(2008)}{2^{2008}},$$

$$S = \frac{2^{2008} - 2}{2^{2008}} \zeta(2008),$$

de donde S es un múltiplo racional de $\zeta(2008)$, y por lo tanto también trascendente.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI