Problema 159, propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España. Calcular la suma

$$\frac{19}{105}+\frac{13}{315}+\frac{67}{3465}+\cdots+\frac{4n^2+16n+19}{16n^4+128n^3+344n^2+352n+105}+\cdots$$

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela.

Como $16n^4+128n^3+344n^2+352n+105=(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)$ se obtiene fácilmente la siguiente expansión en fracciones simples del término general de la serie:

$$R_n=\frac{1}{4(2n+1)}-\frac{1}{4(2n+3)}+\frac{1}{4(2n+5)}-\frac{1}{4(2n+7)}.$$

Pero

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\cdots=1$$

y análogamente

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+5}-\frac{1}{2n+7}\right)=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\cdots=\frac{1}{5},$$

por lo tanto la suma buscada es

$$\sum_{n=0}^{\infty}R_n=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{10}.$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI