**Problema 160,** *propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.*

Sea $F_n$ el $n$–ésimo número de Fibonacci, definido por

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1, \text{ y para todo } n > 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Demostrar que

$$\frac{F_n^2(F_{n+2} + 2F_{n+1}) + F_{n+1}^2(F_{n+2} + F_n)}{2(F_n^3 + F_{n+1}^3) + 3F_nF_{n+1}F_{n+2}} < 1.$$

**Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.**

Sean $n \geq 0$, $a = F_n$, $b = F_{n+1}$ y $c = F_{n+2}$. Por definición, $c = F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = b + a$. Además, $\{F_n\}$ es creciente, de donde $0 = F_0 \leq F_n = a$ y $0 < F_1 \leq F_{n+1} = b$, con lo cual $0 < 2b^3 \leq 2(a^3 + b^3) + 3abc$, siendo entonces la desigualdad a demostrar

$$\frac{a^2(c+2b) + b^2(c+a)}{2(a^3+b^3)+3abc} < 1 \Leftrightarrow a^2(c+2b) + b^2(c+a) < 2(a^3+b^3) + 3abc$$

$$\Leftrightarrow a^2(a+3b) + b^2(2a+b) < 2(a^3+b^3) + 3ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2a^3 + 2b^3 + 3a^2b + 3ab^2 - a^3 - 3a^2b - 2ab^2 - b^3$$

$\Leftrightarrow 0 < a^3 + b^3 + ab^2$, que es cierta porque $0 < b^3 \leq a^3 + b^3 + ab^2$.

**Nota:** La demostración anterior realmente prueba un resultado más general, que es el siguiente:
Sean $a$ y $b$ números reales tales que $0 \leq a$ y $0 < b$, y sea $c = a + b$. Entonces

$$\frac{a^2(c+2b) + b^2(c+a)}{2(a^3+b^3)+3abc} < 1.$$

Es más, si, bajo las mismas hipótesis, se analiza con algo más de detalle, se ve que si en vez de la desigualdad que se ha obtenido al final, $0 < a^3 + b^3 + ab^2$, se hubiese obtenido la $0 < b^3$, el resultado se seguiría dando; esto ocurre si por ejemplo en lugar de $a^2(c+2b) + b^2(c+a) = a^2(a+3b) + b^2(2a+b)$ en el numerador se coloca $a^2(2a+3b) + b^2(3a+b) = a^2(b+2c) + b^2(2a+c)$, dando origen a este otro resultado, aún más general:
Sean $a$ y $b$ números reales tales que $0 \leq a$ y $0 < b$, y sea $c = a + b$. Entonces

$$\frac{a^2(b+2c) + b^2(2a+c)}{2(a^3+b^3)+3abc} < 1,$$

el cual sugiere la siguiente posible reformulación del problema:
Sea $F_n$ el $n$–ésimo número de Fibonacci, definido por

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1, \text{ y para todo } n > 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Demostrar que

$$\frac{F_n^2(2F_{n+2} + F_{n+1}) + F_{n+1}^2(F_{n+2} + 2F_n)}{2(F_n^3 + F_{n+1}^3) + 3F_nF_{n+1}F_{n+2}} < 1.$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI