PROBLEMA 162, *propuesto por Miguel Amengual Covas, Santanyí, España*

Sea O el punto de interseccion de las diagonales AC y BD de un cuadrilatero convexo $ABCD$. Sean I_1, I_2, I_3, I_4 los respectivos incentros de ΔOAB, ΔOBC, ΔOCD, ΔODA. Si $I_1I_2I_3I_4$ es un paralelogramo, demostrar que $ABCD$ es un paralelogramo.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Al ser $I_1I_2 \parallel I_3I_4$, los lados I_1I_2 e I_3I_4 del paralelogramo $I_1I_2I_3I_4$ forman el mismo ángulo α con BD, con lo que $r_1 + r_2 = I_1I_2 \sin\alpha = I_3I_4 \sin\alpha = r_3 + r_4$. De la misma forma, $r_2 + r_3 = r_4 + r_1$, luego $r_1 = r_3$ y $r_2 = r_4$. Supongamos además, sin pérdida de generalidad, que $OA \geq OC$ y $OB \geq OD$, y sean $\kappa = \frac{OA}{OC} \geq 1$ y $\rho = \frac{OB}{OD} \geq 1$. El cociente entre las áreas respectivas de OAB y OCD es

$$\frac{OA + OB + AB}{OC + OD + CD} = \frac{OA \cdot OB}{OC \cdot OD} = \kappa\rho,$$

al ser $r_1 = r_3$ y $\angle AOB = \angle COD$. Entonces, $AB = \kappa(\rho - 1)OC + \rho(\kappa - 1)OD + \kappa\rho CD$, y utilizando el teorema del coseno,

$$AB^2 = \kappa^2 OC^2 + \rho^2 OD^2 + 2\kappa^2\rho(\rho-1)OC(OC+CD) + 2\rho^2\kappa(\kappa-1)OD(OD+CD) +$$
$$+2\kappa\rho(\kappa - 1)(\rho - 1)OC \cdot OD - 2\kappa^2\rho^2 OC \cdot OD \cos\alpha.$$

Por la desigualdad triangular, $OC + CD > OD$, luego $(\rho - 1)(OC + CD) \geq (\rho-1)OD$, con igualdad si y sólo si $\rho = 1$, y de la misma forma $(\kappa-1)(OD+CD) \geq (\kappa - 1)OC$. Entonces,

$$AB^2 \geq \kappa^2 OC^2 + \rho^2 OD^2 + 2\kappa\rho(3\kappa\rho - 2\kappa - 2\rho + 1 - \kappa\rho\cos\alpha)OC \cdot OD.$$

Finalmente, utilizando también el teorema del coseno se tiene que

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos\alpha = \kappa^2 OC^2 + \rho^2 OD^2 - 2\kappa\rho OC \cdot OD \cos\alpha,$$

con lo que insertando la acotación anterior para AB^2, queda, tras simplificar,

$$(\kappa\rho - 1)\cos\alpha \geq 3\kappa\rho - 2\kappa - 2\rho + 1.$$

Como el miembro de la izquierda no supera $\kappa\rho - 1$, se tiene que $(\kappa - 1)(\rho - 1) \leq 0$, que sólo puede darse con igualdad, al ser el miembro de la izquierda no negativo. Se tiene entonces que todas las anteriores desigualdades deben cumplirse como igualdades, con lo que $\kappa = \rho = 1$, y al cortarse entonces las diagonales de $ABCD$ en sus puntos medios, $ABCD$ es un paralelogramo, qed.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI