PROBLEMA 163, *propuesto por Laurentiu Modan, Rumanía*

Se considera la sucesión (A_n), con $n \geq 1$, dada por la relación de recurrencia

$$A_{n+1} = 2A_n + \sqrt{A_n^2 + A_{n+1}^2},$$

con $A_1 = 1$.

i) Estudiar la convergencia de esta sucesión.

ii) Hallar el dominio de convergencia de la serie de potencias de termino general $A_n x^n$.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

El problema tal y como está formulado no tiene solución, ya que si $A_n > 0$, claramente es $A_{n+1} > \sqrt{A_n^2 + A_{n+1}^2} > A_{n+1}$, absurdo. Tiene sentido sin embargo el problema si se define, para algún $1 > \alpha > 0$, la relación de recurrencia como

$$A_{n+1} = 2A_n + \sqrt{A_n^2 + \alpha A_{n+1}^2}.$$

En este caso, restando $2A_n$ de ambos miembros y elevando al cuadrado se obtiene

$$A_{n+1}^2(1-\alpha) - 4A_n A_{n+1} + 3A_n^2 = 0,$$

con soluciones

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{2 \pm \sqrt{1+3\alpha}}{1-\alpha}.$$

La raíz negativa no tiene sentido, ya que claramente $A_{n+1} > 2A_n > 0$ (verificable de forma trivial por inducción al ser $A_1 = 1$). Se tiene entonces que $A_n = \left(\frac{2+\sqrt{1+3\alpha}}{1-\alpha}\right)^{n-1}$. Ahora bien, el numerador es mayor que 2 y el denominador menor que 1, luego A_{n+1} es la n-ésima potencia de un número mayor que 1, y la serie diverge. Se tiene además que

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n = \frac{1-\alpha}{2+\sqrt{1+3\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+\sqrt{1+3\alpha}}{1-\alpha} x\right)^n,$$

serie geométrica que claramente converge siempre que la razón sea menor que 1, es decir, siempre que $x < \frac{1-\alpha}{2+\sqrt{1+3\alpha}} = \frac{2-\sqrt{1+3\alpha}}{3}$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: