REVISTA ESCOLAR DE LA O.I.M. (34)

PROBLEMAS 166-170

PROBLEMA 166

Probar que, si n es un número primo, entonces la parte entera de $\left(4+\sqrt{11}\right)^n$ es múltiplo de n más 7.

Propuesto por Álvaro Begué Aguado, Nueva York, EE.UU.

PROBLEMA 167

Sea ABC un triángulo, de lados $a \geq b \geq c$. Si r es el radio del círculo inscrito, y m_a la mediana correspondiente al lado BC, demostrar que

$$2\left(m_a + r\right) \geq b + c \Leftrightarrow A \leq 90^{\circ}$$

la equivalencia análoga cambiando los signos menor o igual que por mayor o igual que.

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España.

PROBLEMA 168

Hallar todas las ternas (x, y, z) de números reales que son solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + \arcsin\left(2x-1\right) &= y \\ y + \arcsin\left(2y-1\right) &= z \\ z + \arcsin\left(2z-1\right) &= x \end{aligned}$$

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

PROBLEMA 169

Sea q un número primo mayor que 3. Demostrar que existen $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left|\{a_1, \cdots, a_n\} \cap \{3, 4, 5, \cdots\}\right| \geq 1$$

y además

$$2^{2009} \equiv a_1! a_2! \cdots a_n! \bmod q$$

Propuesto por José Hernández Santiago, Oaxaca, México.

PROBLEMA 170

Sean $x_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, con $n \geq 2$; $\lambda \geq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcular el límite doble

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{\alpha \to 0} \sqrt[\alpha]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha + \lambda \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^\alpha - \sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha \right)}{n + \lambda \left(n^\alpha - n \right)}}$$

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI