

DEMOSTRACIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA EXISTENCIA DE INFINITOS NÚMEROS PRIMOS

JOSÉ MANUEL RODRÍGUEZ CABALLERO

Estudiante de 3er año de lic. Matemática

Los entes precursores de las funciones trigonométricas se remontan al Antiguo Egipto y Babilonia, y surgieron en un contexto puramente geométrico, como respuesta a problemas astronómicos. En el siglo XVIII, gracias a los trabajos de L. Euler, se comienzan a tratar a los conceptos trigonométricos de seno, coseno, etc. como funciones propiamente dichas, e independientes de cualquier consideración geométrica, a lo cual se debe que actualmente estén vinculados con prácticamente todas las ramas de la Matemática.

En la Teoría Analítica de los Números, y en particular, en el difícil campo de los números primos, estas funciones, relacionadas con la exponencial por vía de la unidad imaginaria ($i = \sqrt{-1}$), fueron la clave para la demostración de I. Vinogradov de la Conjetura Débil de Goldbach (todo número impar a partir de 5 es la suma de como máximo tres primos), para números naturales suficientemente grandes.

En la presente nota vamos a exponer dos nuevas pruebas del conocido hecho de que existen infinitos números primos, basadas en las funciones trigonométricas, y en especial, en la propiedad de periodicidad de las mismas.

Teorema. (Euclides) *Existen infinitos números primos.*

■ **Demostración 1.** (del autor) Sea \mathbb{P} el conjunto de los números primos, supongamos que es finito, y llamemos N al producto de sus elementos. Para cada $p \in \mathbb{P}$, sabemos que la función de variable real $x \rightarrow \text{sen } \frac{\pi x}{p}$ es $2p$ -periódica, luego, es también $2N$ -periódica. Definimos la siguiente función de variable real:

$$f(x) := \prod_{p \in \mathbb{P}} \text{sen } \frac{\pi x}{p}$$

Como f es el producto de funciones $2N$ -periódicas, es también una función $2N$ -periódica. Notemos que para cada $n \in \mathbb{Z}$, si $|n| > 1$, entonces $f(n) = 0$, porque n tiene algún divisor primo. Consecuentemente $f(1) = f(2N + 1) = 0$, luego, para algún $p \in \mathbb{P}$ concluimos que $\text{sen } \frac{\pi}{p} = 0$, lo cual es absurdo, puesto que $0 < \frac{\pi}{p} < \pi$. Por lo tanto, existen infinitos números primos. \square

Uno de los objetivos de demostrar por diferentes vías un mismo resultado consiste en ver la relación de este hecho con las demás partes de la Matemática. A continuación mostraremos como a partir de las *funciones enteras* (nombre por el que se conocen en Análisis Complejo a los 'polinomios' de grado infinito) se puede probar también que hay infinitos números primos, sin necesidad de usar que $\text{sen } \frac{\pi}{p} \neq 0$.

Definición. Sea $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $n = p_1 p_2 \dots p_r$ en su factorización canónica, y en particular $r = 0$ cuando $n = 1$. Definimos la *función de Möebius* $\mu : \mathbb{Z}_{\geq 1} \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$ mediante $\mu(n) = (-1)^r$, si p_1, p_2, \dots, p_r son distintos dos a dos (incluyendo el caso $r = 0$), y $\mu(n) = 0$ de haber al menos dos iguales.

■ **Demostración 2.** (del autor) Supongamos que hay sólo una cantidad finita de números primos y sea N el producto de ellos. Para cada $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, la función de variable compleja $z \longrightarrow \frac{n}{\pi z} \text{sen } \frac{\pi z}{n}$ es entera, tiene todos sus ceros simples, y precisamente son los elementos de $n\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Definimos siguiente función de variable compleja:

$$f(z) := \prod_{n=1}^N \left(\frac{n}{\pi z} \text{sen } \frac{\pi z}{n} \right)^{\mu(n)}$$

Aplicando el *Principio de Inclusiones y Exclusiones* al conjunto de los ceros de cada $z \longrightarrow \frac{n}{\pi z} \text{sen } \frac{\pi z}{n}$ en el producto anterior, obtenemos que f es entera, tiene todos sus ceros simples, y precisamente son los números enteros no divisibles entre ningún número primo, o sea $\{-1, 1\}$, luego, $f(z) = (1 - z^2)e^{g(z)}$, para alguna función entera g , consecuentemente, tiene lugar la siguiente identidad:

$$\prod_{n=1}^N \left(\text{sen } \frac{\pi z}{n} \right)^{\mu(n)} = \frac{\pi^M}{L} z^M (1 - z^2) e^{g(z)}$$

$$\text{donde } M := \sum_{n=1}^N \mu(n) \text{ y } L := \prod_{n=1}^N n^{\mu(n)}.$$

Observemos que para cada n libre de cuadrados, la función de variable compleja $z \longrightarrow \text{sen } \frac{\pi z}{n}$ es $2N$ -periódica, y por lo tanto, es $2N$ -periódico el miembro izquierdo de la igualdad anterior, no siéndolo su correspondiente miembro derecho (porque en caso contrario tendría infinitos ceros). Por *reductio ad absurdum*, concluimos que existen infinitos números primos. \square

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/>

Edita:

