

Problema 160. Propuesto por José Luís Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sea F_n el n -ésimo número de Fibonacci, definido por

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \forall n \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty).$$

Demuéstrese la desigualdad,

$$\frac{F_n^2 (F_{n+2} + 2F_{n+1}) + F_{n+1}^2 (F_{n+2} + F_n)}{2(F_n^3 + F_{n+1}^3) + 3F_n F_{n+1} F_{n+2}} < 1.$$



Solución de Jesús Álvarez Lobo. Oviedo. Asturias. España.

A fin de facilitar el seguimiento del desarrollo, denotemos

$$F(n) \equiv \frac{F_n^2 (F_{n+2} + 2F_{n+1}) + F_{n+1}^2 (F_{n+2} + F_n)}{2(F_n^3 + F_{n+1}^3) + 3F_n F_{n+1} F_{n+2}}.$$

Por la relación de recurrencia que define la *sucesión de Fibonacci*,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty),$$

y sustituyendo en $F(n)$ el término F_{n+2} por $F_{n+1} + F_n$, se tiene:

$$F(n) = \frac{F_n^2 (\{F_{n+1} + F_n\} + 2F_{n+1}) + F_{n+1}^2 (\{F_{n+1} + F_n\} + F_n)}{2(F_n^3 + F_{n+1}^3) + 3F_n F_{n+1} \{F_{n+1} + F_n\}}.$$

Realizando las operaciones indicadas, reduciendo y ordenando términos, se llega a la expresión,

$$F(n) = \frac{F_n^3 + 3F_n^2 F_{n+1} + 2F_n F_{n+1}^2 + F_{n+1}^3}{2F_n^3 + 3F_n^2 F_{n+1} + 3F_n F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}^3},$$

cuyo numerador y denominador nos recuerdan el desarrollo del *cubo de un binomio*. En efecto, agrupando términos,

$$F(n) = \frac{(F_n + F_{n+1})^3 - F_n F_{n+1}^2}{(F_n + F_{n+1})^3 + F_n^3 + 2F_{n+1}^3},$$

quedando probada la desigualdad, $F(n) < 1$, como trivialmente se comprueba, ya que los *números de Fibonacci* se definen estrictamente positivos para $n > 0$.

Nótese que $F(n)$ también se puede expresar en la forma

$$F(n) = \frac{1 - \frac{F_n F_{n+1}^2}{(F_n + F_{n+1})^3}}{1 + \frac{F_n^3 + 2F_{n+1}^3}{(F_n + F_{n+1})^3}} < 1,$$

resultando aún más evidente la desigualdad, puesto que se verifican las desigualdades

$$\frac{F_n F_{n+1}^2}{(F_n + F_{n+1})^3} \geq 0, \quad \frac{F_n^3 + 2F_{n+1}^3}{(F_n + F_{n+1})^3} > 0,$$

ya que, a lo sumo, $F_n = 0$, siendo, por definición, $F_{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.



Aunque no se pide, estudiemos la **convergencia de la sucesión** $(F(n))_{n=0}^{\infty}$. A tal fin, escribamos el término general de ésta en la forma

$$F(n) = \frac{1 - \frac{(F_{n+1}/F_n)^2}{(1 + F_{n+1}/F_n)^3}}{1 + \frac{1 + 2(F_{n+1}/F_n)^3}{(1 + F_{n+1}/F_n)^3}}.$$

Definiendo, $\Phi(n) \equiv \frac{F_{n+1}}{F_n}$, el término general es

$$F(n) = \frac{1 - \frac{\Phi^2(n)}{[1 + \Phi(n)]^3}}{1 + \frac{1 + 2\Phi^3(n)}{[1 + \Phi(n)]^3}}.$$

Así pues,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(n) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\Phi^2(n)}{[1 + \Phi(n)]^3}}{1 + \frac{1 + 2\Phi^3(n)}{[1 + \Phi(n)]^3}} = \frac{1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi^2(n)}{[1 + \Phi(n)]^3}}{1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2\Phi^3(n)}{[1 + \Phi(n)]^3}} = \frac{1 - \frac{[\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(n)]^2}{[1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(n)]^3}}{1 + \frac{1 + 2 \lim_{x \rightarrow \infty} [\Phi(n)]^3}{[1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(n)]^3}}.$$

Ahora bien, entre la pléyade de interesantes propiedades de la *sucesión de Fibonacci*, destaca la del famoso límite que establece una sorprendente vinculación entre el cociente de dos términos consecutivos de la *sucesión de Fibonacci* y el *número áureo*,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(n) = \Phi \text{ (número áureo), donde } \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Esta relación asintótica fue probada por Barr y Schooling en "*The Field*" (14 de diciembre de 1912).

Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(n) = \frac{1 - \frac{\Phi^2}{(1 + \Phi)^3}}{1 + \frac{1 + 2\Phi^3}{(1 + \Phi)^3}} = \frac{(1 + \Phi)^3 - \Phi^2}{(1 + \Phi)^3 + 2\Phi^3 + 1}.$$

Sustituyendo Φ por su valor y simplificando, se llega fácilmente al siguiente resultado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(n) = \frac{\sqrt{5}}{4}$$



Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/

Edita:

