Soluciones a los problemas del duelo matemático 08 publicadas en el número 33 de la Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática Por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, España

PMO33.1. El ortocentro H de un triángulo acutángulo ABC se transforma respectivamente en los puntos A_1, B_1, C_1 en las simetrías axiales cuyos ejes son los lados a, b, c del triángulo. Se supone que se verifican las siguientes igualdades de ángulos:

$$\angle C_1AB_1 = \angle CA_1B; \qquad \angle A_1BC_1 = \angle AB_1C; \qquad \angle B_1CA_1 = \angle BC_1A.$$

Demostrar que ABC es equilátero.

Es relativamente conocido (o fácilmente demostrable por el lector) que el simétrico del ortocentro H respecto del lado AB coincide con el segundo punto en el que la recta CH corta a la circunferencia circunscrita a ABC, y de forma similar con los simétricos de H respecto de los otros dos lados. Ahora bien, $\angle C_1BA = \angle C_1CA = \angle HCA = \frac{\pi}{2} - \angle A$, mientras que $\angle B_1BA = \angle HBA = \frac{\pi}{2} - \angle A$, luego al ser $\angle C_1AB_1 = \pi - \angle C_1BB_1$, se tiene que $\angle C_1AB_1 = 2\angle A$. Pero $\angle BA_1C = \pi - \angle BAC = \pi - \angle A$, luego por la primera igualdad dada, $\angle A = \frac{\pi}{3}$. Las otras dos igualdades son las permutaciones cíclicas de la primera, luego se obtienen de ellas resultados que son las permutaciones cíclicas del obtenido, es decir, $\angle B = \frac{\pi}{3}$ y $\angle C = \frac{\pi}{3}$, con lo que el resultado pedido queda probado.

PMO33.2. Determinar todas las ternas (x, y, z) de enteros positivos tales que se verifique la igualdad

$$3 + x + y + z = xyz.$$

Supongamos que $yz = 1$. Entonces, $y = z = 1$ por ser enteros positivos, y se tiene que $5 + x = x$, claramente falso. Entonces, como $yz \geq 2$, podemos escribir la ecuación dada como $x = \frac{3+y+z}{yz-1}$, donde sin pérdida de generalidad podemos asumir que $x \leq y \leq z$. Si $x = 1$, se obtiene la relación $5 = yz - y - z + 1 = (y-1)(z-1)$, es decir, $y = 2$ y $z = 6$. Si $x = 2$, se obtiene la relación $5 = 2yz - y - z = y(z-1) + z(y-1) \geq y + z$, pues $y, z \geq x = 2$. Luego sólo pueden ser $y = z = 2$, que obviamente no proporciona solución pues entonces sería $3 + 2 + 2 + 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, claramente falso, o $y = 2, z = 3$, que nuevamente no proporciona solución porque sería $3 + 2 + 2 + 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. Finalmente, si $x \geq 3$, entonces $6 \geq 3yz - y - z = yz + z(y-1) + y(z-1) \geq yz + 2y + 2z$ por ser $y, z \geq x = 3$, o $(y+2)(z+2) \leq 10$, imposible ya que debería ser $y+2, z+2 \geq 5$. Luego la única solución es $(1, 2, 6)$ y sus permutaciones cíclicas.

PMO33.3. Sea $ABCD$ un tetraedro con tres aristas mutuamente perpendiculares en el vértice D. Sea S el centro de su esfera circunscrita. Probar que el baricentro T de su cara ABC está en la recta DS.

Claramente, la perpendicular a la cara ABD por el circuncentro del triángulo ABD debe pasar por el centro S de la esfera circunscrita, pues dicha circunferencia circunscrita es la intersección de la esfera circunscrita a $ABCD$ con el plano que contiene a la cara ABD. Al ser ABD rectángulo en D, se tiene que su circuncentro es el punto medio de AB, y por lo tanto S está en la paralela a CD por el punto medio de AB. De forma similar, S también está en las paralelas a AD, BD por los puntos medios de BC, CA respectivamente. Asumiendo que las coordenadas de A, B, C son, sin pérdida de generalidad, $A \equiv (a, 0, 0)$, $B \equiv (0, b, 0)$, $C \equiv (0, 0, c)$ y $D \equiv (0, 0, 0)$, entonces el baricentro tiene por coordenadas $T \equiv (\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3})$, y el centro de la esfera circunscrita tiene por coordenadas $S \equiv (\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2})$, y ambos puntos están en la recta $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ que claramente pasa por D, luego D, S, T están alineados.

PMO33.4. Determinar todos los enteros positivos n para los cuales existen enteros positivos x, y tales que se cumplen las dos igualdades $x + y = n^2$, $10x + y = n^3$.

Restando ambas igualdades, obtenemos que $9x = n^2(n - 1)$. Supongamos en primer lugar que existen soluciones para valores de n que no sean múltiplos de 3. Entonces, 9 divide a $n - 1$, y $n = 9a + 1$ para algún entero positivo a (en caso de ser $a = 0$ sería $x = 0$). Por lo tanto, $x = a(9a + 1)^2$, y se tiene que $y = n^2 - x = n^3 - 10x = (9a + 1)^2(1 - a)$, que no es positivo al ser $a \geq 1$. Entonces, n ha de ser múltiplo de 3, y podemos escribir $n = 3b$ para algún entero positivo b, con lo que $x = b^2(3b - 1)$, y $y = n^2 - x = n^3 - 10x = b^2(10 - 3b)$. Se sigue que, para que $y > 0$, ha de ser $3b < 10$, o $b \leq 3$. Luego los únicos valores que puede tomar n para que las igualdades se cumplan para enteros positivos x, y son $n = 3, 6, 9$, con soluciones respectivas $(x, y) = (2, 7), (20, 16), (72, 9)$.

PMO33.5. Sean a, b, c números reales. Demostrar que

$$V = 4(a^2 + b^2 + c^2) - \left((a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2\right)$$

es siempre no negativo y determinar todos los valores de a, b, c para los que $V = 0$.

Desarrollando los cuadrados, simplificando y reagrupando, se tiene

$$V = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2.$$

Esta expresión es claramente no negativa al ser suma de cuadrados, siendo nula si y sólo si todos los cuadrados son nulos, es decir, $V \geq 0$, siendo $V = 0$ si y sólo si $a = b = c = \lambda$ para cualquier real λ.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI