**PROBLEMA 166**, *propuesto por Álvaro Begué Aguado, Nueva York, EE.UU.*

Probar que, si $n$ es un número primo, entonces la parte entera de $(4+\sqrt{11})^n$ es múltiplo de $n$ más 7.

*Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España*

Si $n=2$, entonces $\lfloor (4+\sqrt{11})^2 \rfloor = 27 + \lfloor 8\sqrt{11} \rfloor = 53$, al ser $26^2 = 676 < 8^2 \cdot 11 = 704 < 729 = 27^2$. Al ser $53-7=46$ par, ser cumple el resultado propuesto.

Sea ahora $n$ un primo impar. Entonces, al ser $0 < 4-\sqrt{11} < 1$, se tiene que

$$\lfloor (4+\sqrt{11})^n \rfloor - 7 = (4+\sqrt{11})^n + (4-\sqrt{11})^n - 8 = 2\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k} 4^{n-2k} 11^k + 8(4^{n-1}-1).$$

Como $\binom{n}{2k} = \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!}$ contiene $n$ como factor primo en el numerador pero no en el denominador para $k=1,2,\ldots,\frac{n-1}{2}$, claramente cada miembro del sumatorio en el miembro de la derecha es divisible por $n$. Al mismo tiempo, al ser $n$ primo impar, por el teorema pequeño de Fermat $4^{n-1}$ da resto 1 al dividir por $n$, con lo que también lo es el término restante.