PROBLEMA 169, *propuesto por José Hernández Santiago, Oaxaca, México*

Sea q un número primo mayor que 3. Demostrar que existen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ tales que

$$|\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \cap \{3, 4, 5, \ldots\}| \geq 1$$

y además

$$2^{2009} \equiv a_1!a_2! \ldots a_n! \pmod{q}.$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Por el teorema de Wilson, $(q-1)! \equiv q-1 \pmod{q}$ para todo primo q, o equivalentemente $(q-2)! \equiv 1 \pmod{q}$. Si $2^{2009} \equiv 1 \pmod{q}$, nos basta con tomar $a_1 = q-2 \geq 3$, mientras que si $2^{2009} \equiv q-1 \pmod{q}$, nos basta con tomar $a_1 = q-1 > 3$.

Para cualquier otro resto r tal que $2 \leq r \leq q-2$ y $2^{2009} \equiv r \pmod{q}$, nótese que, al ser $q-m \equiv (-1)m \pmod{q}$, entonces

$$r!(q-r)! \equiv (-1)^{q-r} r(q-1)! \equiv (-1)^r r \pmod{q}.$$

Claramente, r y $q-r$ tienen distinta paridad y suman q, con lo que son distintos y al menos uno de ellos es no inferior a $\frac{q+1}{2} \geq 3$. Además, ninguno de ellos puede ser igual a $q-1$. Nos basta entonces con tomar, si r es par, $a_1 = r$, $a_2 = q-r$, y si r es impar, $a_1 = r$, $a_2 = q-r$, $a_3 = q-1$.