PROBLEMA 170, *propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España*

Sean $x_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, con $n \geq 2$, $\lambda \geq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Calcular el límite doble

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\alpha\to 0} \sqrt[\alpha]{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\alpha + \lambda\left(\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^\alpha - \sum_{i=1}^n x_i^\alpha\right)}{n + \lambda(n^\alpha - n)}}.$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Si $x_i = x$ para todo i siendo x un real positivo, la raíz vale claramente x, con lo que ése es también el valor del límite. Asumiremos entonces en el resto del problema que los x_i no son todos iguales.

Llamemos A_n y G_n respectivamente a las medias aritmética y geométrica de los n primeros x_i, y para todo $\alpha \neq 0$,

$$M_n(\alpha) = \sqrt[\alpha]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^\alpha}$$

a la media potencial de exponente α. Es conocido que $\lim_{\alpha\to 0} M_n(\alpha) = G_n$, y que para todo $0 < \alpha < 1$, $A_n > M_n(\alpha) > G_n$ al no ser todos los x_i iguales.

Hallemos el límite en los casos particulares $\lambda = 1$ y $\lambda = 0$. En el primer caso, se tiene que el límite doble es

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\alpha\to 0} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n,$$

mientras que en el segundo caso, el límite doble es

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\alpha\to 0} M_n(\alpha)$$

Si calculamos primero el límite cuando $\alpha \to 0$, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} G_n.$$

Consideremos ahora la sucesión definida de la siguiente manera: $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = b$, para todo entero no negativo m, $x_{3\cdot 2^m+1} = x_{3\cdot 2^m+2} = \cdots = x_{3\cdot 2^{m+1}}$, igual a 1 si m es par, e igual a b si m es impar. Queda entonces que, para todo entero par no negativo m,

$$A_{3\cdot 2^m} = \frac{2b+1}{3}, \qquad G_{3\cdot 2^m} = \sqrt[3]{b^2}, \qquad M_{3\cdot 2^m}(\alpha) = \sqrt[\alpha]{\frac{2b^\alpha + 1}{3}},$$

mientras que para todo entero impar positivo m,

$$A_{3\cdot 2^m} = \frac{b+2}{3}, \qquad G_{3\cdot 2^m} = \sqrt[3]{b}, \qquad M_{3\cdot 2^m}(\alpha) = \sqrt[\alpha]{\frac{b^\alpha + 2}{3}},$$

Claramente, las sucesiones $A_n, G_n, M_n(\alpha)$ no tienen límite si $b \neq 1$, con lo que no se podría hallar el límite doble ni para $\lambda = 0$ ni para $\lambda = 1$. Supondremos entonces en el resto del problema que existen los límites de A_n, G_n y $M_n(\alpha)$, y los denotaremos respectivamente por $A, G, M(\alpha)$. Entonces, para $\lambda = 1$ el límite pedido es claramente A, mientras que para $\lambda = 0$, calculando primero el límite con respecto a α se llega a $\lim_{n\to\infty} G_n = G$, mientras que tomando primero el límite con respecto a n se llega a $\lim_{\alpha\to 0} M(\alpha) = G$. Asumiremos entonces en lo que queda de problema que $\lambda \neq 0, 1$.

Demostraremos ahora que el límite doble pedido vale G si $\lambda \neq 0, 1$, independientemente del orden en el que tomemos los límites. Aunque vayamos a tomar el límite cuando $n \to \infty$ en primer lugar, claramente podemos asumir que $\alpha < 1$, ya que luego tendremos que tomar el límite cuando $\alpha \to 0$. Ahora bien, siempre que $\alpha < 1$ pero independientemente de su valor, el límite cuando $n \to \infty$ del radicando es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1-\lambda)\left(M_n(\alpha)\right)^\alpha + \lambda n^{\alpha-1} A_n^\alpha}{(1-\lambda) + n^{\alpha-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(M_n(\alpha)\right)^\alpha = \left(M(\alpha)\right)^\alpha,$$

con lo que el límite doble, tomando primero el límite cuando $n \to \infty$, valdría

$$\lim_{\alpha\to 0} M(\alpha) = G.$$

Para tomar primero el límite cuando $\alpha \to 0$, escribimos primero la raíz como

$$\sqrt[\alpha]{\frac{(1-\lambda)n\left(M_n(\alpha)\right)^\alpha + \lambda n^\alpha A^\alpha}{(1-\lambda)n + \lambda n^\alpha}}.$$

Ésta es claramente la media potencial ponderada, con exponente α, de $M_n(\alpha)$ y A, con pesos respectivos $(1-\lambda)n$ y λn^α. Mientras los límites existan y no exista indeterminación, el límite cuando $\alpha \to 0$ será la media geométrica ponderada de los límites de $M_n(\alpha)$ y de A, con pesos respectivos iguales a los límites de $(1-\lambda)n$ y λn^α, es decir, el límite con respecto de α de la raíz será

$$\left(G_n^{(1-\lambda)n} A_n^\lambda\right)^{\frac{1}{(1-\lambda)n+\lambda}} = G_n \left(\frac{A_n}{G_n}\right)^{\frac{\lambda}{(1-\lambda)n+\lambda}}.$$

El límite de esta última cantidad cuando $n \to \infty$ es claramente G.