PROBLEMA 171, *propuesto por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Universitá degli Studi Tor Vergata, Roma, Italia*

Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Probar que

$$\frac{a}{c(1+a)} + \frac{b}{a(1+b)} + \frac{c}{b(1+c)} \leq \frac{1}{18}\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right)(a+b+c)^2.$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Como $(1-\sqrt{a})^2 \geq 0$, entonces $1 + a \geq 2\sqrt{a}$ con igualdad si y sólo si $a = 1$. Por la desigualdad entre medias aritmética y geométrica, $\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{c}\frac{b}{a}\frac{c}{b}} = 3$, y como a, b, c son números positivos, $a + b + c \geq \sqrt[3]{abc} = 1$, con igualdad en ambos casos si y sólo si $a = b = c$. Finalmente, utilizando la desigualdad entre medias aritmética y cuadrática,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)}{2} \leq \frac{(a+b+c)^2}{3},$$

con igualdad si y sólo si $a = b = c$.

Por lo tanto, nos basta con demostrar que

$$\frac{\sqrt{a}}{c} + \frac{\sqrt{b}}{a} + \frac{\sqrt{c}}{b} \leq \sqrt{\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}}\sqrt{\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}},$$

que es cierta por ser la desigualdad de Cauchy-Schwarz aplicada a los vectores $\left(\sqrt{\frac{a}{c}}, \sqrt{\frac{b}{a}}, \sqrt{\frac{c}{b}}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}\right)$, con igualdad si y sólo si $a = b = c$. Queda pues demostrada la desigualdad propuesta, dándose la igualdad si y sólo si $a = b = c = 1$.