PROBLEMA 173, *Propuesto por Xavi Ros, estudiante, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España*

Probar o refutar la siguiente afirmación:

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado. La sucesion $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles $f_n : I \to \mathbb{R}$, y existe una funcion $f : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I |f_n - f| = 0.$$

Entonces $f_n \to f$ puntualmente salvo en un conjunto de medida nula.

¿Y si las funciones f_n y f son continuas?

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Nótese que podemos considerar sin pérdida de generalidad el caso en el que $f = 0$ e $I = [0, 1]$, pues podemos restar f a sí misma y a cada f_n, y sustituir la variable independiente x por $a+(b-a)x$ para mapear el intervalo $[0, 1]$ a cualquier intervalo cerrado $I = [a, b]$, sin alterar ni hipótesis ni tesis del problema.

Denotaremos como suele ser habitual $H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ al n-ésimo número armónico, y definimos la sucesión de funciones $g_n : \mathbb{R} \to [0, 1]$ dada por $g_n(x) = 1$ cuando $H_n + \frac{1}{4(n+1)} < x < H_{n+1} - \frac{1}{4(n+1)}$, $g_n(x) = 0$ cuando $x < H_n - \frac{1}{4(n+1)}$ y cuando $x > H_{n+1} - \frac{1}{4(n+1)}$, $g_n(x) = \frac{1}{2}+2(n+1)(x-H_n)$ cuando $|x-H_n| \le \frac{1}{4(n+1)}$, y $g_n(x) = \frac{1}{2}-2(n+1)(x-H_{n+1})$ cuando $|x-H_{n+1}| \le \frac{1}{4(n+1)}$. Nótese que $g_n(x)$ es nula salvo en un intervalo $\left(H_n - \frac{1}{4(n+1)}, H_{n+1} + \frac{1}{4(n+1)}\right)$ de longitud $\frac{3}{2(n+1)} \le \frac{3}{4} < 1$, con lo que podemos tomar sin pérdida de generalidad un intervalo J_n de longitud 1 que contiene enteramente en su interior al intervalo donde g_n es no nula. Tomamos ahora, para cada $x \in J_n$, $f_n(\{x\}) = g_n(x)$, donde $\{x\}$ denota a la parte fraccional de x, es decir, $\{x\} = x - [x]$ donde $[x]$ es el mayor entero menor o igual que x, y tomamos finalmente $f_n(1) = f_n(0)$. Claramente, las funciones f_n así definidas son continuas en $[0, 1]$, toman valores en el conjunto $[0, 1]$, y además

$$\int_I |f_n - f| = \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n+1},$$

pues la gráfica de $f_n(x)$ es un trapecio con bases de longitudes $\frac{3}{2(n+1)}$ y $\frac{1}{2(n+1)}$, y altura de longitud 1, posiblemente "partido" por una recta perpendicular a sus bases, con una mitad situada a partir de $x = 0$ inclusive, y otra situada hasta $x = 1$ inclusive. Nótese que la sucesión de funciones así definida cumple los requisitos del problema. Nótese también que los intervalos en los que g_n y g_{n+1} valen al menos $\frac{1}{2}$ son dos intervalos cerrados con el extremo superior del primero igual al extremo inferior del segundo. Finalmente, la sucesión $\{H_n\}$ no está acotada, evolucionando para n arbitrariamente grande como $\ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$, donde γ es la constante de Euler-Mascheroni y se ha utilizado notación de Landau. Pero entonces, para cualquier $x \in [0, 1]$, existe N arbitrariamente grande de forma que $g_N(x) \ge \frac{1}{2}$ para algún x' tal que $\{x'\} = x$. Luego la sucesión $f_n(x)$ no converge para ningún $x \in [0, 1]$.

El anterior argumento demuestra que la afirmación propuesta es falsa incluso para funciones continuas; es más, "redondeando" los cuatro vértices del trapecio que conforma la gráfica de $g_n(x)$ mediante trozos de parábola tangentes a dos lados o a un lado y su prolongación, generalizamos el resultado, demostrando que la afirmación es falsa también cuando cada f_n es derivable y con derivada continua.

La afirmación pasa a ser cierta sin embargo cuando las f_n son derivables y además $f_n'(x)$ está uniformemente acotada, es decir, si existe un real M tal que $|f_n'(x)| < M$ para todo n y todo $x \in I$. En este caso, si la sucesión no converge puntualmente en x_0, para todo natural N existen $n > N$ y $\epsilon > 0$ tales que $|f_n(x_0)| > \epsilon$. Como $f_n'(x)$ está acotada, se puede comprobar que existe un intervalo $\left(x_0 - \frac{\epsilon}{M}, x_0 + \frac{\epsilon}{M}\right)$, en el que f_n tiene el mismo signo que $f_n(x_0)$, siendo además el área bajo $|f_n(x)|$ en dicho intervalo al menos igual al área de un triángulo cuya base es el intervalo y su altura ϵ, es decir, la contribución de este intervalo a la integral de $|f_n|$ es al menos $\frac{\epsilon^2}{M}$. Luego si las f_n y f son derivables con derivada uniformemente acotada, y la integral de $|f_n - f|$ tiende a 0, la sucesión converge puntualmente para cada $x \in I$.