

Problema 174

Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca

Si n es un número natural tal que $n(n+1) = \underline{abc}\underline{abc}$, con $a \neq 0$, tendremos $n^2 < n(n+1) \leq 999999$ y $(n+1)^2 > n(n+1) \geq 100100$, de donde

$$316 \leq n \leq 999 \quad (1)$$

A su vez,

$$\begin{aligned} n(n+1) &= 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2a + 10b + c \\ &= 1001(10^2a + 10b + c) \\ &= 1001 \cdot (\underline{abc}) \end{aligned}$$

que implica $1001|n(n+1)$. Pues $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, tenemos $1001 = 1 \cdot 1001 = 7 \cdot 143 = 11 \cdot 91 = 13 \cdot 77$ y, habida cuenta que $\text{mcd}(n, n+1) = 1$, hay que considerar los siguientes casos:

1. $1001|n$, que es incompatible con (1).
2. $1001|n+1$, incompatible también con (1).
3. $7|n$ y $143|n+1$. Existirán números naturales x, y tales que $n = 7x$, $n+1 = 143y$. Al eliminar n obtenemos la ecuación diofántica $7x - 143y = -1$ cuya solución general puede escribirse en la forma $x = 102 + 143t$, $y = 5 + 7t$ siendo t un número entero. Únicamente cuando $t = 0$ obtenemos una solución válida, a saber, $n = 7 \cdot 102 = 714$, $n+1 = 715$ con $714 \times 715 = 510510$.
4. $143|n$ y $7|n+1$. Hacemos servir la notación anterior en este caso y los siguientes; se llega a la ecuación $143x - 7y = -1$ con solución general $x = 2 + 7t$, $y = 41 + 143t$. Sin solución válida.
5. $11|n$ y $91|n+1$. La ecuación es, ahora, $11x - 91y = -1$ con solución general $x = 33 + 91t$, $y = 4 + 11t$ y única solución válida cuando $t = 0$: $n = 11 \cdot 33 = 363$, $n+1 = 364$ y $363 \times 364 = 132132$.
6. $91|n$ y $11|n+1$. Se obtiene $91x - 11y = -1$, $x = 7 + 11t$, $y = 58 + 91t$; única solución válida para $t = 0$: $n = 91 \cdot 7 = 637$, $n+1 = 638$ y $637 \times 638 = 406406$.
7. $13|n$ y $77|n+1$. Se obtiene $13x - 77y = -1$, $x = 71 + 77t$, $y = 12 + 13t$; única solución válida para $t = 0$: $n = 13 \cdot 71 = 923$, $n+1 = 924$ y $923 \times 924 = 852852$.
8. $77|n$ y $13|n+1$. Se llega a la ecuación $77x - 13y = -1$ con solución general $x = 14 + 13t$, $y = 83 + 77t$. Sin solución válida.

Así, pues, los números que se piden son 132.132, 406.406, 510.510 y 852.852 .