

PROBLEMA 175, propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España

Sean x, y, z tres números reales estrictamente positivos tales que $xy + yz + zx = 1$. Demostrar que

$$xyz \leq \frac{1}{9} \sum_{\text{cíclica}} \left(\frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{x+y} - z \right) \leq \frac{x+y+z}{9}.$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Como $(1+x^2)(1+y^2) = (1+xy)^2 + (x-y)^2$, se tiene que

$$\frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{x+y} - z \geq \frac{1+xy-yz-zx}{x+y} = \frac{2xyz}{z(x+y)} = \frac{2xyz}{1-xy},$$

con igualdad si y sólo si $x = y$, y de forma análoga para sus permutaciones cíclicas. Para demostrar la desigualdad de la derecha, basta entonces probar que

$$\frac{3}{\frac{1}{1-xy} + \frac{1}{1-yz} + \frac{1}{1-zx}} \leq \frac{2}{3} = \frac{(1-xy) + (1-yz) + (1-zx)}{3},$$

claramente cierto en virtud de la desigualdad entre medias aritmética y armónica, con igualdad si y sólo si $xy = yz = zx$. Queda pues demostrada la desigualdad de la izquierda, en la que se da la igualdad claramente si y sólo si $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Como $1+x^2 = x^2 + xy + yz + zx = (x+y)(x+z)$, y de forma similar para sus permutaciones cíclicas, la desigualdad de la derecha es equivalente a

$$\sqrt{(y+z)(z+x)} + \sqrt{(z+x)(x+y)} + \sqrt{(x+y)(y+z)} \leq 2(x+y+z).$$

Pero aplicando la desigualdad entre medias aritmética y geométrica a $y+z, z+x$, se tiene que

$$\sqrt{(y+z)(z+x)} \leq \frac{x+y}{2} + z,$$

con igualdad si y sólo si $x = y$, y de forma similar para sus permutaciones cíclicas. Queda pues demostrada la desigualdad de la derecha, en la que se da la igualdad si y sólo si $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.