PROBLEMAS 176 – 180

Problema 176, propuesto por Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona (España)

Dado un triángulo no degenerado ABC, y un punto P en su interior, trazamos las cevianas AD, BE, CF que pasan por P. Determinar todos los triángulos ABC y todos los puntos P en su interior para los que se cumple que al menos dos de las circunferencias circunscritas a AEF, BFD y CDE pasan por P.

Problema 177, propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania

Sea $P(n, senx)$ el siguiente polinomio:

$$P(n, senx) = -\binom{n}{0} sen^2 x + \binom{n}{1} \frac{sen^4 x}{2} - \cdots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n} \frac{sen^{2n+2} x}{n+1}.$$

Calcular el límite cuando n tiende a infinito de ese polinomio.

Problema 178, propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona (España)

Sean *a,b,c* números reales verificando $0 < a,b,c \le 1$. Demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{2+3a}} + \frac{2}{\sqrt{2+3b}} + \frac{3}{\sqrt{2+3c}} \ge \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

Problema 179, propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila (España)

Sean T y T' los triángulos ABC, A'B'C', rectángulos respectivamente en A y A'. Se supone que sus lados respectivos verifican

$$a > b \ge c \quad \text{y} \quad a' > b' \ge c'.$$

Demostrar que

$$\left(\frac{aa'}{4} - \frac{1}{9}\sum_{cíclica} aa'\right)^2 \ge \left(\frac{a^2}{4} - \frac{1}{9}\sum_{cíclica} a^2\right)\left(\frac{a'^2}{4} - \frac{1}{9}\sum_{cíclica} a'^2\right)$$

¿Cuándo se verifica la igualdad?

*¿Se verifica la desigualdad para toda clase de triángulos?

***Problema 180, propuesto por José M. Rodríguez Caballero, estudiante, Cuba**

Sea $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Demostrar que

$$\frac{H_1}{2} - \frac{H_2}{3} + \frac{H_3}{4} - \frac{H_4}{5} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{H_n}{n+1} + \cdots = \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$