

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS 36
ALGUNOS PROBLEMAS DE LA OLIMPIADA DE EUROPA
CENTRAL 2009

MEMO2009-1

Supongamos que se tienen $n \geq 3$ colores distintos. Sea $f(n)$ el mayor entero con la siguiente propiedad: Todo lado y toda diagonal de un polígono convexo con $f(n)$ vértices puede ser coloreado con uno de entre n colores, de la manera siguiente:

- i) Al menos se usan dos colores.
- ii) Tres vértices cualesquiera del polígono determinan, o bien tres segmentos del mismo color, o bien tres segmentos de colores diferentes.

Probar que $f(n) \geq (n-1)^2$, con igualdad para infinitos valores de n .

MEMO2009-2

Sea ABCD un cuadrilátero convexo tal que AB y CD no son paralelas y $AB = CD$. Los puntos medios de las diagonales AC y BD son E y F, respectivamente. La recta EF corta a los segmentos AB y CD en G y H, respectivamente. Demostrar que el ángulo AGH es igual al ángulo DHG.

MEMO 2009- 3

Determinar todos los enteros $k \geq 2$ tales que, para todos los pares (m,n) de enteros positivos distintos, no mayores que k , el número

$$n^{n-1} - m^{m-1}$$

NO es divisible por k .

MEMO2009-4

Sean a, b, c números reales tales que para dos cualesquiera de las ecuaciones

$$x^2 + ax + b = 0; x^2 + bx + c = 0; x^2 + cx + a = 0,$$

hay exactamente un número real que satisface a ambas.

Determinar todos los posibles valores de $a^2 + b^2 + c^2$.