Problema 172.- Probar que hay una infinidad de enteros naturales tales que si se traslada su cifra de las unidades a la posición de mayor orden (por ejemplo, 12345 se convierte en 51234), entonces el número queda multiplicado por 9. Calcular el más pequeño de dichos enteros.
Designaremos por $N = na$ al número buscado siendo a la cifra de las unidades y n el número que resulta de suprimir dicha cifra que suponemos tiene p dígitos.
Para que el número buscado na no aumente de longitud al multiplicarse por 9 cuando se transforma en an, forzosamente ha de comenzar por 1 y terminar por 9, por tanto

$$n9 = 10n + 9,\ 9n = 9\cdot 10^p + n,$$

la condición del enunciado queda:

$$9\cdot 10^p + n = 9\left(10n + 9\right)$$

despejando n,

$$n = \frac{9\left(10^p - 9\right)}{89}$$

Como 89 es primo, tenemos que buscar p para que $10^p \equiv 9\ (89)$.

Haciendo la sucesión de restos potenciales de 10 módulo 89, encontramos que $10^{43} \equiv 9\ (89)$.

Como el ciclo de los restos es de orden 44, hay solución para los infinitos valores de $p = 43 + 44k, \left(k = 0,1,\ldots\right)$.

La solución mas pequeña corresponde a p = 43 y será un entero de 44 dígitos que podemos encontrar con un sencillo algoritmo que es prácticamente el de la multiplicación por 9 apoyándonos en el hecho de que en el resultado los dígitos se desplazan una posición. El siguiente cuadro describe el comienzo del algoritmo. Partimos de la cifra final que es conocida (el 9 en negrilla de la fila inferior), vamos multiplicando por 9 y colocando en la fila segunda la cifra de las unidades del producto y en la primera la de las decenas para facilitar el siguiente producto.
El algoritmo progresa al trasladar cada dígito de las unidades a la fila inferior en la columna de la izquierda como indican las flechas. El proceso termina cuando hemos alcanzado la longitud (44 en este caso).

	….	4	6	1	8	Decenas
	…	2	4	7	1	Unidades
…	2	4	7	1	**9**	Inicio

El número pedido es N = 10112359550561797752808988764044943820224719
El método es generalizable si cambiamos el factor 9 por cualquier otro dígito $a = 2,3,\ldots,9$.
La expresión que determina n es entonces

$$n = \frac{a\left(10^p - a\right)}{10a - 1}$$

El resto del proceso es análogo al caso anterior.
La tabla siguiente muestra todos los resultados de longitud mínima para $a = 2,3,\ldots,9$.

Factor	Nº dígitos	Número
2	18	105263157894736842
3	28	1034482758620689655172413793
4	6	102564
5	42	102040816326530612244897959183673469387755
6	58	1016949152542372881355932203389830508474576271186440677966
7	22	1014492753623188405797
8	13	1012658227848
9	44	10112359550561797752808988764044943820224719

Cristóbal Sánchez-Rubio
I.E.S. Penyagolosa, Castellón.