PROBLEMA 175, *Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.*

Sean x, y, z tres números reales estrictamente positivos tales que $xy+yz+zx=1$. Demostrar que

$$xyz \le \frac{1}{9}\sum_{cíclica}\left(\frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{x+y}-z\right)\le \frac{x+y+z}{9}.$$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, Lugo).

Las hipótesis implican que existen A, B, C ángulos de un triángulo ΔABC tales que $x=\cot A$, $y=\cot B$, $z=\cot C$. Como $A+B+C=\pi$ rad,

$$\frac{\sqrt{(1+\cot^2 A)(1+\cot^2 B)}}{\cot A+\cot B}-\cot C=\frac{\csc A\csc B}{(\cos A\sin B+\cos B\sin A)\csc A\csc B}-\cot C=\csc(A+B)-\cot C=\csc C-\cot C,$$

siendo entonces las desigualdades a probar

$$\cot A\cot B\cot C\le\frac{1}{9}(\csc C-\cot C+\csc A-\cot A+\csc B-\cot B)\le\frac{\cot A+\cot B+\cot C}{9};$$

al ser $A+B+C=\pi$ rad, $\cot A+\cot B+\cot C=\cot A\cot B\cot C-\csc A\csc B\csc C=\dfrac{\cos A\cos B\cos C-1}{\sin A\sin B\sin C}$,

luego dichas desigualdades son equivalentes a

$$\frac{\cos A\cos B\cos C}{\sin A\sin B\sin C}\le\frac{1}{9}\left(\frac{\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A}{\sin A\sin B\sin C}-\frac{\cos A\cos B\cos C+1}{\sin A\sin B\sin C}\right)\le\frac{\cos A\cos B\cos C-1}{9\sin A\sin B\sin C},$$

es decir,

$$\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{9}[\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A-(\cos A\cos B\cos C+1)]\le\frac{1}{9}(\cos A\cos B\cos C-1).$$

Denotando por p, r y R al semiperímetro, inradio y circunradio de ΔABC, dichas desigualdades se reescriben como $\dfrac{p^2-r^2-4rR-4R^2}{4R^2}\le\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{p^2+r^2+4rR}{4R^2}-\dfrac{p^2-r^2-4rR}{4R^2}\right)\le\dfrac{1}{9}\dfrac{p^2-r^2-4rR}{4R^2}$ o

$$p^2-r^2-4rR-4R^2\le\frac{1}{9}(2r^2+8rR)\le\frac{1}{9}(p^2-r^2-4rR).$$

La desigualdad de la izquierda es equivalente a la $9p^2\le 11r^2+44rR+36R^2$, que es cierta debido a las desigualdades de Gerretsen, $p^2\le 3r^2+4rR+4R^2$, y de Euler, $2r\le R$, puesto que

$$9p^2\le 9(3r^2+4rR+4R^2)=27r^2+36rR+36R^2\le 11r^2+44rR+36R^2.$$

La igualdad se alcanza si y sólo si se alcanza en las de Gerretsen y de Euler, es decir, sólo y cuando ΔABC es equilátero, lo cual equivale a que $x=y=z$ o bien, al ser $xy+yz+zx=1$, a $x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Los lados a, b, c de ΔABC son raíces del polinomio $P(t)=(t-a)(t-b)(t-c)=t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t-abc=t^3-2pt^2+[p^2+r(r+4R)]t-4prR$, que tiene una sola, o dos o tres raíces reales distintas. En el primer caso, el polinomio $P'(t)=3t^2-4pt+p^2+r(r+4R)$ tendrá una raíz real, y en los otros, por el teorema de Rolle, por lo menos (y, por tanto, exactamente, al ser de grado dos) dos raíces reales distintas, luego su discriminante, $(-4p)^2-4\cdot 3\cdot[p^2+r(r+4R)]=4[p^2-3r(r+4R)]$, será nulo o estrictamente positivo, es decir, $3r^2+12rR\le p^2$, que es la desigualdad de la derecha. Además, en ella se da la igualdad si y sólo si $P(t)$ tiene una raíz real triple, o sea, sólo y cuando ΔABC es equilátero, es decir, si y sólo si $x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.