“Ejemplos que sí son ejemplos” para el desarrollo de esquemas conceptuales en la determinación de puntos críticos

Claudia Guzner, *Universidad Tecnológica Nacional, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina*
Sandra Segura, *Universidad Tecnológica Nacional, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina*

RESUMEN

El presente trabajo gira en torno a privilegiar la construcción de esquemas conceptuales –que a su vez potencien otros ya construidos- para la aprehensión del siguiente criterio en torno a la derivada: “Sea f una función real, dos veces derivable en un intervalo (a, b), sea c un punto de (a, b) tal que $f'(c) = 0$. Entonces, si $f''(c) < 0$, f presenta un máximo relativo en c; si $f''(c) > 0$, f presenta un mínimo relativo en c”. Trabajar sobre esta propiedad, no ha sido casual. A pesar de su aparente claridad y especificidad, varios son los autores que ponen de manifiesto interpretaciones erróneas del criterio, basadas, posiblemente, en “malos ejemplos” que obscurecen los atributos relevantes que pudieran ser transferidos como características del principio.

Nivel educativo: secundario y universitario

"Los atributos relevantes de un concepto son las características que un objeto debe poseer para poder ser considerado un ejemplo de dicho concepto"
Carmen Azcárate (2003)

1. INTRODUCCIÓN

A la hora de programar su clase, un docente debe tomar decisiones didácticas y epistemológicas –cruciales pero no excluyentes-, para mostrar aquello que considera como relevante alrededor de un objeto matemático. Generalmente, primero toma decisiones didácticas –clase tradicional, a partir de situaciones, en entornos computacionales, entre otros-; luego epistemológicas – qué como a priori, qué como definiciones, qué como propiedades-. Posteriormente, elige una serie de "problemas" y luego opta por ejercicios de reforzamiento, para finalmente evaluar.
En la mayoría de los casos, a pesar de que el itinerario elegido por cada docente depende de sus creencias, la elección del "problema" ocupa sólo una parte del proceso, y no se tiene en cuenta que de esta decisión depende "qué" se muestra y "qué" se deja a la propia interpretación del alumno.
En este artículo se explican las decisiones tomadas, al momento de la elección de un "problema", en el marco de una secuencia de enseñanza para el uso del criterio de la derivada en la determinación de máximos y mínimos de una función.

2. MARCO TEÓRICO

Este trabajo se enmarca en el paradigma que sostiene que proponer secuencias de enseñanza significa poner al alumno ante experiencias donde él construya sus conocimientos desde la memoria comprensiva, a través de situaciones en las cuales encuentre un equilibrio adecuado entre la lógica del saber matemático y la lógica de su propia estructura y desarrollo cognitivo. Se asume que lo que el alumno evoca cuando un objeto matemático aparece nuevamente dentro del contexto de otro, no es la definición de aquel, sino lo que Vinner & Tall (1981) llaman sus esquemas conceptuales -representaciones, procedimientos, actividades, problemas, ejemplos, recuerdos, propiedades, definiciones, entre otros-.
Contrariamente, cuando un docente propone un trabajo con cierto objeto matemático, tradicionalmente suele suponer que la definición del mismo es lo que primero aparece en la mente del estudiante, por lo que, en las situaciones de aula, los alumnos no son enfrentados con la génesis de los conceptos, sino que a partir de una definición, propiedades o aplicaciones algorítmicas, se les acerca a ellos.
La estructura cognitiva desarrollada alrededor de un concepto matemático, no es estática, sino que va evolucionando a medida que transcurre el tiempo y como consecuencia de las experiencias que va teniendo el estudiante alrededor del concepto. Por esta razón, el docente debe proponer situaciones que provoquen desequilibrios a fin de promover la aparición de las relaciones y vinculaciones asociadas al concepto que conlleven al salto cognitivo que produce un aprendizaje.
En este contexto la elección del "problema" y el "medio" no es trivial. Uno no debe supeditarse al otro, pero si hubiera que privilegiar alguno, sería el problema. No cabe duda que el medio del siglo XXI es la WEB porque ofrece la posibilidad de manipular dinámicamente los objetos matemáticos, en múltiples sistemas de representación, dentro de esquemas interactivos y ambientes de exploración, en pos del enriquecimiento de la construcción de los esquemas personales.

En el caso particular de la construcción de esquemas conceptuales alrededor de la derivada, algunos autores (Sánchez-Matamorros, 2006) sostienen que “hay que centrar la atención en el «tipo de relaciones» que los estudiantes son capaces de establecer entre los «elementos matemáticos»[1] del concepto, comprendidos, de alguna manera determinada (como una acción, un proceso o un objeto), cuando resuelven problemas” .
Otros (Moreno y Cuevas, 2004), sugieren el diseño de situaciones didácticas para la enseñanza del concepto derivada y sus elementos, que puedan evitar falsas interpretaciones fruto, en general, de una fuerte carga operativa y descontextualización. Estos mismos autores citan resultados que ponen de manifiesto esquemas conceptuales falaces sobre los “elementos máximos y mínimos”, al aplicar el clásico criterio de la derivada sin una reflexión previa, pero relevante, como la es la del dominio de la función y sus características de continua, acotada y diferenciable.
Algunos sostienen que, para la construcción de un esquema conceptual congruente con la actividad matemática futura del alumno, debe generársele un sentimiento de acuerdo que lo que está aprendiendo efectivamente es cierto para todos los elementos dentro de la categoría bajo estudio. En este sentido Balacheff (Balacheff, 1990) analiza algunas respuestas en torno a la idea de contraejemplo, tomando en particular aquellos contraejemplos que hacen que deba modificarse una conjetura inicial, ya sea en forma superficial –sólo debe contemplar ese contraejemplo- o profunda. Uno de los casos que trata es el criterio de la derivada primera para encontrar puntos críticos en una función, proponiendo contrajemplos a una primera conjetura, y poniendo en reconsideración algunas cuestiones, en particular que el punto en donde la derivada primera es cero “debe” ser del dominio de la función, punto que los alumnos al aplicar este criterio pasan de alto de manera sistémica.
Calvo Pesce (Calvo Pesce, 2001), analiza un repertorio de “ejemplos y no-ejemplos”[2] en torno a funciones de concavidad positiva, basado en el análisis de entrevistas realizadas a un número representativo de alumnos. En ellas se destaca la preferencia de presentar como definición una caracterización sólo aplicable bajo condiciones suficientes pero no necesarias -funciones con derivada segunda positiva o no negativa, funciones con derivada creciente, funciones en cuyos gráficos todas las rectas tangentes quedan por debajo de él, por citar algunas-. Al requerírseles posteriormente a los mismos entrevistados ejemplos de funciones de concavidad positiva, sólo proporcionan algunos en relación a funciones no derivables o de funciones cuyas gráficas se asimilen a parábolas, lo cual muestra que el esquema conceptual asociado a la concavidad positiva se confunde con el criterio para su determinación.
Más recientemente, Sánchez (Sánchez, 2006), puntualiza que en el desarrollo del esquema conceptual de la derivada, la comprensión de la relación entre puntos críticos y derivadas (primera y segunda) son indicadores de la evolución del mismo.

3. UN APORTE PARA LA CONSTRUCCIÓN DE ESQUEMAS CONCEPTUALES EN LA DETERMINACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS

Se adhiere al principio -análogamente adoptado para los primeros pasos en la enseñanza de la derivada, dando consistencia en el planteo metodológico- que para la construcción de esquemas conceptuales en torno al criterio de la derivada segunda no es conveniente

[1] Piaget (1963) define un elemento como «el producto de una disociación o de una segregación en el interior de una totalidad previa»
[2] En el sentido de Azcárate (2003).

poner en acto el tradicional esquema propiedad-ejemplos-ejercicios, sino, por el contrario, uno de la forma problema-tarea-institucionalización-reforzamiento.
La intención del problema seleccionado es permitir al alumno experimentar, a través de simulaciones interactivas -Figura 1- con relaciones y aproximaciones numéricas, expresiones algebraicas, gráficos, etc., a efectos de enriquecer los esquemas conceptuales personales a priori, en torno a la propiedad en cuestión.

En la Facultad Regional Mendoza le han dado al grupo ECAMI una oficina para desarrollar sus tareas de investigación. Como el grupo necesita tener acceso a Internet, debe realizar una conexión por cable desde un servidor que se encuentra en otro edificio. Dado que los fondos son escasos es necesario mantener los costos al mínimo. Hay dos tipos de cables para la conexión, uno exterior que cuesta $125 el metro y otro interior que cuesta $100 el metro. Los edificios distan 6 metros en línea recta (distancia S-E). El servidor (S) está en el tercer piso de uno de los edificios, y la oficina del grupo ECAMI (O) está en el tercer piso del otro edificio. El cable puede ingresar por cualquier punto (I) del piso donde está la oficina. Si ingresa por un punto enfrentado al servidor (E) la cantidad de cable interno necesario para llegar a la oficina es de 11 metros (distancia O-E). El grupo debe decidir por donde ingresar el cable al edificio en donde se encuentra la oficina, es decir debe determinar si la conexión es completamente externa, o una parte interna y otra externa, con el fin de minimizar el gasto a realizar

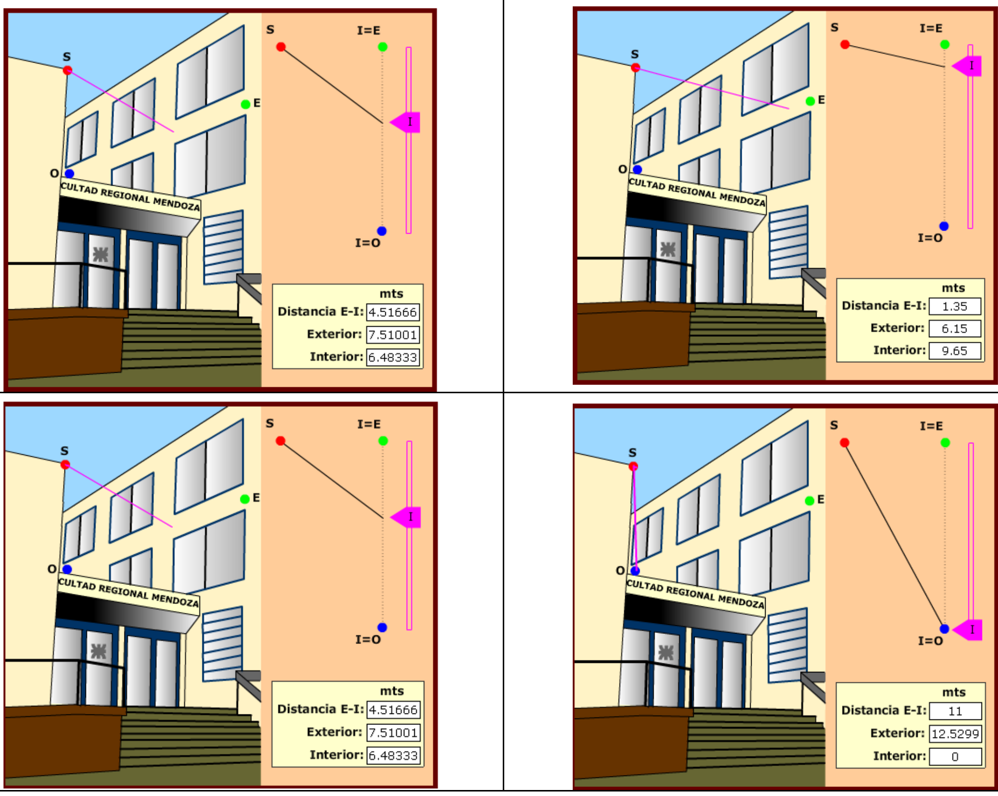

Figura 1

A partir de las tareas propuestas, alrededor del “cableado”, el alumno construye la función f que lo modela, la cual no es trivial – f: $[0,11] \rightarrow \Re$ dada por $f(x) = 125\sqrt{36 + x^2} + 100\,(11 - x)$ -, pero que sin embargo, implícitamente, remite a funciones cuadráticas usualmente usadas como “ejemplos prototípicos”.

La secuencia finaliza cuando el alumno “encuentra” el valor mínimo del costo del cableado, a partir del cálculo de la derivada primera y el punto del dominio para el cual ésta se anula.
Hasta aquí el problema es un ejemplo convencional del uso del criterio mencionado ut supra. Para transformarlo en un “buen ejemplo” se propone un cambio de parámetro: el valor del metro de cable exterior pasa a ser de $110.
A partir de tareas similares a las anteriores, el alumno “descubre” que en este caso: f: $[0,11] \rightarrow \Re$ dada por $f(x) = 125\sqrt{36+x^2} + 100\,(11-x)$; $f'(13.09) = 0$, $f''(13.09) > 0$; en m = 11 la función alcanza un mínimo relativo.
Se observan claramente las consecuencias de este ingenuo cambio de parámetro en el problema. Ahora la función presenta un mínimo en un punto extremo del intervalo de definición. El criterio de la derivada “funciona mal”: el cálculo de las derivadas primera y segunda darían como valor mínimo un punto no perteneciente al dominio de definición de la función, valor que no tiene sentido en el contexto del problema. Si el esquema conceptual construido alrededor de la propiedad en cuestión fuera débil, los alumnos podrían incluso concluir que el problema no tiene solución.

4. CONCLUSIONES

El objeto del trabajo ha sido mostrar una secuencia de enseñanza, que favorecería la construcción de esquemas conceptuales sustentables; entendiendo esto último como un aprendizaje no percibido como un proceso memorístico o algorítmico, sino más bien como un proceso asociativo, no rutinario, con sentido, que conlleva a interpretar adecuadamente los aspectos relevantes de los elementos que funcionan, en este caso, en torno a la derivada.
La praxis del recurso tiene por intención crear escenarios ricos desde una perspectiva semiológica a partir de la concreción de “ejemplos” que a nuestro criterio “sí son ejemplos”.
Las condiciones de éxito del desarrollo del diseño que se propone, quedan indirectamente vinculadas a confrontaciones posteriores. La sola implementación del recurso no asegura su eficacia, habrá que ser cuidadosos en la prevención de los conflictos que pudieran producirse.
Las decisiones que se han tomado lo han sido sobre la base de las referencias teóricas y antecedentes, siendo lo que justifica que, a nuestro entender, esta propuesta sea valiosa.
Análisis similares pueden servir para diseñar otras prácticas que hagan uso de las herramientas empleadas en esta y resulten de valor en la aprehensión de otros conceptos matemáticos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MORENO, S., CUEVAS, C. (2004). *Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el cálculo diferencial.* Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal. Educación Matemática. Vol. 16, Nº 2, pág. 93-104. Santillana. Distrito Federal, México

AZCÁRATE, C. (2003). *Definiciones, demostraciones, ¿por qué?, ¿cuándo?, ¿cómo?* . Ponencia en las X JAEM. Editado en www.quadernsdigitals.net

CALVO PESCE, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo diferencial e integral.* Universitat autònoma de Barcelona. Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciènces Experimentals.

BALACHEFF, H. (1990). *Beyond a psychological approach: the psychology of mathematics education*. Learning of Mathematics, Vol. 10, Nº 3, 2-8.

GUZNER, C., SEGURA, S. y otros (2008). *Learning styles and environments web design: the case of the derivative.* Inédito, aceptado para presentación en ICME 11

ROMERO, C. (1996). *Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo. Ensayo de un cuestionario.* Revista Enseñanza de las Ciencias, 14 (1), 3-14.

SÁNCHEZ-MATAMORROS, G. y otros. (2006). *El desarrollo del esquema de derivada.* Revista Enseñanza de las Ciencias, 24 (1), 85-98.