El Legado de Paul Erdős

Roberto Bosch Cabrera
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de la Habana

Introducción:

El objetivo principal de este trabajo es dar a conocer la vida y el quehacer científico del excepcional matemático Paul Erdős. El cual nace el 26 de Marzo de 1913 en Budapest-Hungría y fallece el 20 de Septiembre de 1996 en Warsaw-Polonia. Las dos direcciones fundamentales de este trabajo son indagar en la personalidad de Erdős y en su extensa obra matemática propiamente. Aparecen muchos de sus teoremas y conjeturas algunas de las cuales aun no han sido probadas. Este matemático se dedicó principalmente a la Teoría de Números, aunque trabajó también en:
Teoría de Grafos, Combinatoria, Geometría, Análisis Clásico y Probabilidades.
Hoy en día se le considera el matemático con mayor número de publicaciones científicas después de Euler. Basta mencionar que trabajaba aproximadamente 19 horas al día, muchos de sus resultados fueron en colaboración, Erdős fue notable por su cooperación con otros matemáticos y por las soluciones tan bellas y sencillas que muchas veces obtenía. Es importante apuntar que muchos problemas propuestos por Erdős a la comunidad matemática fueron el germen para posteriores investigaciones. En el trabajo aparecen reflejadas algunas anécdotas y datos de la vida privada de este matemático debido a la necesidad de entender a fondo su comportamiento excéntrico y obsesivo, muchas veces criticado y malentendido. Por último destacar que su obra es vastísima y que su vida es la encarnación del amor por la matemática.

Por qué los números son bellos?
Alguien se pregunta por qué la Novena Sinfonía de Beethoven lo es?
Yo conozco números bellos, si ellos no lo son; nada lo es.
Paul Erdős.

Vida Personal:

Paul Erdős nació el 26 de Marzo de 1913 en Budapest, Hungría. Mientras su madre estaba en el hospital dando a luz mueren sus dos hijas de tres y cinco años respectivamente de fiebre escarlata. Erdős ("de el bosque") pasa a ser hijo único y un niño sobreprotegido. Temiendo que contrajera una enfermedad contagiosa sus padres lo retiran de la escuela pública y se encargan ellos mismos de su educación. Ellos eran profesores de matemática y física. Su padre es hecho prisionero de los rusos durante la primera Guerra Mundial y enviado a la Siberia, no es hasta el 1920 que vuelve a ver a su hijo.

Erdős fue un niño prodigio; con tres años multiplicaba números de varios dígitos en la mente, con cuatro descubrió los números negativos por sí mismo, cuando llegaba alguien a su casa le preguntaba la edad y se entretenía calculando los segundos que había vivido, con cinco años calculó la distancia de la Tierra al Sol conociendo cuanto demoraría un tren en llegar hasta este. Erdős fue un solucionador regular de los problemas propuestos en la Revista Komal, una publicación matemática de primer orden para estudiantes de preuniversitario. A final de año siempre aparecía una foto suya entre los estudiantes más talentosos. Aprendió varios idiomas, entre ellos, Alemán, Inglés, Francés, Latín, Griego Antiguo, y más adelante en su vida un conocimiento superficial de Hebreo. En 1930 con 17 años entra al Pázmány Péter Tudományégyeten, la universidad de ciencias de Budapest fundada en el 1635. Fue por esta época que Erdős comenzó a desarrollar su propio lenguaje especial: él llamaba a los niños "epsilon", Sam a los Estados Unidos y Joe (Joseph Stalin) a la Unión Soviética. Con 19 años encuentra una demostración elemental del Teorema de Chebyshev. Posteriormente halla una extensión para un teorema de Menger en grafos infinitos, su demostración es incluida en el libro clásico de Teoría de Grafos de Dénes Kőnig. En 1934 termina la universidad y presenta su tesis sobre las progresiones aritméticas y su relación con los números primos tutoreado por Leopold Fejér, gran parte del trabajo lo hizo estando en segundo año.

Decide continuar estudios en Inglaterra uniéndose al excepcional grupo de teoría de números de Louis Mordell en Manchester. Pasa por Cambridge donde conoce a Harold Davenport y Richard Rado quienes más tarde se convertirían en dos de sus mejores amigos. En 1938 Erdős entra al Instituto de Estudios Avanzados en Princeton; bajo la atmósfera estimulante del lugar su talento florece como nunca antes, él considera este como su *annus mirabilis*. Escribió artículos con Mark Kac y Aurel Wintner prácticamente los creadores de la teoría de números probabilística, también escribió con Paul Turán sobre teoría de aproximación y resuelve un problema importante de Witold Hurewics en teoría de dimensión.

Erdős deja Princeton y comienza a viajar por todo el mundo desarrollando sus investigaciones. Colabora con matemáticos de la talla de Alfred Tarski, Ivan Niven, Gábor Szego, William Feller, Ernst Straus, entre otros. Este último tuvo publicaciones con Albert Einstein. A propósito es bueno comentar un fenómeno conocido como el número de Erdős; este se define como sigue: Paul tiene número 0, una persona que haya publicado con Erdős tiene número 1, una que haya publicado con el anterior pero no con Erdős tiene asignado un 2 y así sucesivamente. Esto puede parecer poco serio pero da la medida de la gran contribución de Erdős a la matemática, valga decir que posee alrededor de 1500 publicaciones y colaboró con cerca de 500 matemáticos. Solo comparable con el gigante Euler. Sus obras se están recopilando en una serie de DVDs, para su posterior divulgación.

No obstante a Erdős se le critica el no haber investigado en temas de las matemáticas modernas como son: Grupos de Lie, Geometría Algebraica, Topología Algebraica, Mecánica Cuántica y Teoría de la Relatividad. A menudo algunos matemáticos afirmaban lo mucho que había hecho Erdős con tan poco conocimiento, la explicación a lo anterior la encontramos en que Paul Erdős estuvo fuertemente influenciado a lo largo de su vida por el tipo de matemáticas que hizo en sus primeros años, ocurre que la matemática en Hungría se especializa en temas de la Teoría de Números, Combinatoria y Teoría de Grafos, el razonamiento combinatorio es central en Ciencia de la Computación, donde por cierto los húngaros están entre los líderes a nivel mundial. En [**4**] se explica la relación de Erdős con niños prodigios húngaros. Por otro lado está su permanencia en Inglaterra, durante este tiempo su mentor fue Louis Mordell, un eminente teórico de números. Si la matemática se pudiera separar en los constructores de teorías y los solucionadores de problemas Erdős estaría sin duda en la segunda clasificación, más que esto; sería el monarca absoluto.

Una posible explicación del comportamiento excéntrico de Erdős es la concepción que tenía este del mundo. Poseer bienes eran un problema para él, nunca tuvo tarjeta de crédito, nunca aprendió a manejar (Hay una anécdota muy curiosa estando en Australia con Szekeres)[**8**]; y era feliz de viajar por años con dos maletas casi vacías. Para conocer de su visión acerca de la religión, la política, la música, entre otras cosas ver[**6**][**7**]. Sus relaciones interpersonales fuera del marco matemático no siempre eran las mejores, pero es importante considerar el papel sobreprotector de su madre, basta decir que Erdős estando en Inglaterra una vez afirmó que nunca antes le había untado mantequilla a un pan. Erdős nunca superó la pérdida de sus hermanas, aun sin haberlas conocido, quizás por esto sentía una gran pasión por los niños, cuando se encontraba con una mujer siempre le preguntaba cuantos hijos tenía, si le respondía varios él le comentaba que era una mujer afortunada. Cuando arribaba a una nueva ciudad se presentaba diciendo "Mi cerebro está abierto". Una vez instalado en casa de un amigo o conocido trabajaba arduamente por días con estos, intercambiando ideas y proponiendo problemas. Solía terminar las sesiones diciendo "Mañana continuaremos si estoy vivo."

Después de la muerte de su madre en Enero de 1971 Erdős se sumerge en su trabajo cada vez con mayor vigor; alrededor de 19 horas diarias, para esto toma café y Benzedrina (derivado de la anfetamina). El se veía más frágil y demacrado que nunca, a menudo usaba la chaqueta del pijama como pulóver. Debido a su simple estilo de vida necesitaba poco dinero; solía donarlo a matemáticos jóvenes los cuales decía lo necesitarían más que él. Decía que Dios poseía un libro transfinito donde estaban las demostraciones más bellas y cuando él quería referirse a alguna decía esta es del libro. Erdős recibió el Premio Wolf en el 1983, además de numerosos grados honorarios en Academias de Ciencias de varios países:

-Miembro honorífico de la Academia de Ciencias de Hungría.
-Miembro extranjero de la Academia de Ciencias de EUA.
-Miembro extranjero de la Academia de Ciencias de la India.
-Miembro honorífico de la Sociedad Matemática de Londres.
-Miembro extranjero de la Sociedad Real de Londres.

Estando en vida se instauró el Premio Paul Erdős con el objetivo de estimular a matemáticos que tuvieran una labor meritoria en la divulgación y enseñanza de la matemática, principalmente elemental, un galardonado fue el cubano Luis J. Davidson, uno de los fundadores de los concursos de matemática en Cuba.

A Erdős le gustaba ser libre, hacer lo que quería cuando quería. Siempre vivió a la altura de sus principios morales y esperaba de los demás lo mismo. Le disgustaban mucho los sistemas políticos opresivos y estuvo libre de odio personal.

Paradójicamente muere solo el 20 de Septiembre de 1996 a la edad de 83 años de un ataque al corazón en Warsaw, Polonia. Se encontraba allí para participar en una conferencia, estando en el hotel comienza a sentirse mal y es llevado al hospital, donde fallece 12 horas más tarde, al día siguiente sus colegas debido a su retraso llaman al hotel y se les informa de lo sucedido. Erdős es cremado y sus cenizas llevadas a un cementerio judío en Budapest. En su memoria se celebra una conferencia anual a la que asisten matemáticos de todos los países.

Paul Erdős fue una fuente mágica de inspiración por su mente incisiva y uno de los matemáticos más prolíficos de nuestro tiempo.

Trabajos Matemáticos:

1. Teorema de los números primos.
   El número de primos menores que n es asintóticamente igual a $\frac{n}{\log(n)}$.

   Esto fue probado por Hadamard y de la Vallée-Poussin en 1896 usando fuertes herramientas analíticas. En el 1948 Erdős y Atle Selberg descubren en Princeton una demostración elemental. Ellos publican sus resultados en revistas diferentes.[**9**][**10**]

2. Postulado de Bertrand.
   Para todo $n \geq 1$ existe algún primo p con $n < p \leq 2n$.

   Joseph Bertrand conjetura y verifica empíricamente este postulado para $n < 3000000$.
   Se conocen tres demostraciones:
   1850 Chebyshev
   1919 Ramanujan[**11**]
   1932 Erdős (1er artículo publicado)(19 años)[**12**]

3. Método Probabilístico.[**1**]
   Si en un conjunto dado de objetos la probabilidad de que uno de estos no tenga una cierta propiedad es menor que 1, entonces debe existir un objeto con esta propiedad.
   Ejemplo:
   Sea F una colección de $A_i \subset X$ con $d = |A_i| \geq 2$. F es 2-coloreable si existe una coloración de X con dos colores tal que todo A_i es no monocromático.
   Teorema: Toda familia de a lo sumo $2^{(d-1)}$ d-conjuntos es 2-coloreable.

   Coloreamos X aleatoriamente con dos colores, todas las coloraciones son igualmente probables. Para cada $A \in F$ sea E_A el evento tal que A es monocromático.
   $p(E_A) = \frac{2}{2^d} = \frac{1}{2^{(d-1)}}$ y sea $m = |F| \leq 2^{(d-1)}$. Los eventos E_A no son excluyentes.

   $$p(\bigcup_{A \in F} E_A) < \sum_{A \in F} p(E_A) = \frac{m}{2^{(d-1)}} \leq 1$$

   Entonces existe una coloración que pertenece a:

   $$\left[\bigcup_{A \in F} E_A\right]^c = \bigcap_{A \in F} E_A^c$$

4. Número Normal.[**5**]

$$x = [x] + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + ...$$

Representación de x real en base $g \quad 0 \leq c_i \leq g-1$
Para cualquier dígito c (base g) y todo número natural n denotamos $l(c,n)$ como el número de dígitos de la sucesión $c_1, ..., c_n$ los cuales son igual a c. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l(c,n)}{n} = \frac{1}{g} \quad \forall c: \; 0 \leq c \leq g-1$$

Entonces x es normal en base g. Un número se dice absolutamente normal si es normal en cualquier base.
La existencia de números absolutamente normales fue probada por E.Borel usando Teoría de la Medida. El primer ejemplo lo da Sierpinski en el 1916.

En el 1933 Champernowne conjetura que 0,2357111317... (se forma poniendo los números primos uno a continuación del otro) es normal en base 10.
En el 1946 Erdős y Copeland lo prueban.[13]

5. Teorema de Sylvester-Gallai[**1**]
Dados $n \geq 3$ puntos en el plano no todos alineados existe una recta que solo contiene dos de estos.

Erdos conjetura este resultado en el 1933, pero no puede probarlo. Posteriormente Tibor Grunwald (Gallai) lo demuestra. Se cree que este problema fue primeramente propuesto por Sylvester en la revista Educational Times en 1893.

6. Para todo n uno puede encontrar n puntos en una circunferencia tal que la distancia entre dos cualesquiera es entera. (1945)[**14**][**15**]

7. Es imposible encontrar infinitos puntos en el plano no todos alineados tal que todas las distancias sean enteras. (1945)[**14**][**15**]

8. Constante de Erdős-Borwein

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \approx 1{,}6066951524$$

1948 Erdős demuestra que E es irracional.[**16**]
1992 Borwein encuentra generalizaciones a este resultado.[**17**]

9. Conjetura de Erdős-Turán.[**18**]
   $A \subseteq \mathbb{N}$
   $$\sum_{n \in A} \frac{1}{n} = \infty$$
   Entonces A contiene progresiones aritméticas arbitrariamente grandes.

10. En el 1849 A. de Polignac conjetura que cualquier número impar $n \geq 3$ es de la forma $2^k + p$ $k \in \mathbb{N}$ con p primo o $p = 1$.
    1950 Erdős prueba que existen infinitos números impares términos de una progresión aritmética para los cuales la conjetura falla.[**5**][**19**]

11. Cualquier entero x satisface al menos una de las siguientes congruencias:
    $$x \equiv 0(2) \quad x \equiv 0(3) \quad x \equiv 1(4) \quad x \equiv 3(8) \quad x \equiv 7(12) \quad x \equiv 23(24)$$
    Si x no es par ni múltiplo de 3 entonces $x = 24t + r$ con $t \in \mathbb{Z}$ y $r \in \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$
    1950 Erdős conjetura que dado cualquier natural n existe un conjunto finito de congruencias con módulos diferentes mayores que n y tal que cualquier entero satisface al menos una.
    Erdős lo prueba para $n = 2$ usando como módulos varios divisores de 120. Para $n = 3$ con divisores de 2880.[**5**]

12. Existen infinitos pares de números naturales $x < y$ tal que:
    $$d(x) = d(y) \quad \varphi(x) = \varphi(y) \quad \sigma(x) = \sigma(y)$$
    Basta considerar $x = 3^k 568 \quad y = 3^k 638 \quad k = 0, 1, 2...$
    1958 Erdős [**21**]demuestra que para cualquier número natural n existen n números naturales diferentes $a_1, ..., a_n$ tal que:
    $$d(a_i) = d(a_j) \quad \varphi(a_i) = \varphi(a_j) \quad \sigma(a_i) = \sigma(a_j) \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

13. En el 1800 fue conjeturado que
    $$(n+1)(n+2)\cdots(n+k) = x^l \quad k, l \geq 2 \quad n \geq 0$$
    no tiene solución en enteros.
    1975 Erdős y Selfridge lo demuestran.[**20**]

14. Conjetura de Erdős-Strauss.[**31**]
    Para todo $n \geq 2$ existen a, b, c naturales tal que se cumple:

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

    Actualmente se conoce que es verdadera para $2 \leq n \leq 10^{14}$.
    Se puede probar para los $n \equiv 2(3)$ usando la identidad:

$$\frac{4}{2+3x} = \frac{1}{2+3x} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)(2+3x)}$$

15. Sea h la altura máxima de un triángulo no obtusángulo, R, r son respectivamente el radio de la circunferencia circunscrita e inscrita, se cumple que: $R + r \leq h$.[**22**]

16. Desigualdad de Erdős-Mordell:[**23**][**24**][**25**]
    Sea M un punto arbitrario tomado dentro de un triángulo ABC; x, y, z las distancias desde M hasta A, B, C respectivamente y u, v, w las distancias hasta los lados BC, CA, AB respectivamente. Se cumple que:

$$x + y + z \geq 2(u + v + w)$$

    con igualdad si y solo si el triángulo es equilátero y M su centro.

17. Conjetura de Erdős:
    1953 Sea f un polinomio de grado 3 con coeficientes enteros . Existen infinitos primos p tal que $f(p)$ es libre de cuadrados?

    2007 Harald Helfgott[**26**] demuestra el siguiente teorema:
    Sea $f \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio cúbico sin raíces repetidas. Asumamos que, para todo primo q, existe una solución $x \in (\mathbb{Z}/q^2\mathbb{Z})^*$ a $q^2 \nmid f(x)$. Entonces existen infinitos primos p tal que $f(p)$ es libre de cuadrados.

18. Todo entero positivo es la suma de uno o más números de la forma $2^r 3^s$, donde r y s son enteros no negativos y ningún sumando divide a otro. (23=9+8+6).[**27**]

19. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que toda recta paralela al x-eje intersecta el conjunto A en un número finito de puntos, entonces existe una recta paralela al y-eje la cual intersecta el conjunto $A^{\complement}$ en $\boldsymbol{c}$ puntos. ($\boldsymbol{c}$ es la cardinalidad del continuum.)[**28**]

Bibliografía:

[**1**] Martin Aigner, Gunter M.Ziegler, Proofs from the Book. Springer-Verlag, 2003.

[**2**] Béla Bollobás, Prove and Conjecture, American Mathematical Monthly 105, March 1998.

[**3**] Ralph Faurdree, A conjecture of Erdős, American Mathematical Monthly 105, May 1998.

[**4**] Paul Erdős, Child Prodigies, Mathematics Competitions 8, 1995.

[**5**] W.Sierpinski, Elementary Theory of Numbers, Polska Akademia Nauk, 1964.

[**6**] Melvyn B.Nathanson, The Erdős Paradox. (lecture)

[**7**] Janos Pach,Two Place at Once. (lecture)

[**8**] George Szekeres, My collaboration with Paul Erdos. (lecture)

[**9**] A. Selberg, An elementary proof of the prime-number theorem, Ann. of Math. (2)50, 1949.

[**10**] P. Erdős, On a new method in elementary number theory, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 35, 1949.

[**11**] S. Ramanujan, A proof of Bertrand's postulate, J. Indian Math.Soc.11, 1919.

[**12**] P. Erdős, Beweis eines Satzes von Tschebyschef, Acta Sci.Math.5,1932.

[**13**] P. Erdős, A.Copeland, Note on normal numbers, Bull.Amer.Math.Soc. 52,1946.

[**14**] P. Erdős, N.H.Anning, Integral distances, Bull.Amer.Math.Soc. 51,1945.

[**15**] P. Erdős, Integral distances, Bull.Amer.Math.Soc. 51,1945.

[**16**] P. Erdős, On arithmetical properties of Lambert series, J. Indian Math. Soc.12,1948.

[**17**] P. Borwein, On the irrationality of certain series. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 112,1992.

[**18**] G. Halász, L. Lovász, M. Simonovits, V.T. Sós(eds), Paul Erdős and His Mathematics.I,II. Springer-Verlag. 2002.

[**19**] P. Erdős, On integers of the form $2^k + p$ and some related problems, Summa Brasil. Math. 2, 1950.

[**20**] P. Erdős, J. L. Selfridge, The product of consecutive integers is never a power, Illinois J. Math. 19,1975.

[**21**] P. Erdős, Solution of two problems of Jankowska, Bull. Acad. Polon. Sci. 6,1958.

[**22**] I.F.Sharygin, Problemas en Planimetría, Mir Moscú. 1988.

[**23**] P. Erdős, Proposed problem 3740, American Mathematical Monthly 42,1935.

[**24**] L.J.Mordell, D.F.Barrow, Solution to problem 3740, American Mathematical Monthly 44,1937.

[**25**] R.A.Satnoianu, Erdős-Mordell-Type inequalities in a triangle, American Mathematical Monthly 110,2003.

[**26**] `http://www.arxiv.org/0706.1497.`

[**27**] Problem 1, 66th William Lowell Putnam Mathematical Competition. 2005.

[**28**] W.Sierpinski, Cardinal and ordinal numbers, Polska Akademia Nauk, 1958.

[**29**] `http://mathworld.wolfram.com`

[**30**] `http://www.oakland.edu./enp`

[**31**] `http://math.uindy.edu/swett`