PROBLEMA 179, *propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España*

Sean T y T' los triángulos ABC, $A'B'C'$, rectángulos respectivamente en A y A'. Se supones que sus lados respectivos verifican

$$a > b \geq c \qquad \text{y} \qquad a' > b' \geq c'.$$

Demostrar que

$$\left(\frac{aa'}{4} - \frac{1}{9}\sum_{\text{cíclica}} aa'\right)^2 \geq \left(\frac{a^2}{4} - \frac{1}{9}\sum_{\text{cíclica}} a^2\right)\left(\frac{a'^2}{4} - \frac{1}{9}\sum_{\text{cíclica}} a'^2\right).$$

¿Cuándo se verifica la igualdad?
¿Se verifica la desigualdad para toda clase de triángulos?

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Nótese en primer lugar que un escalado de uno de los dos triángulos (manteniendo las proporciones relativas entre sus lados) por un factor ρ no afecta al problema, pues entonces el término de la izquierda queda multiplicado por ρ^2, igual que el factor del miembro de la derecha correspondiente al triángulo escalado, quedando invariante el otro factor del miembro de la derecha. Podemos entonces asumir sin pérdida de generalidad que $a' = a$.

Multiplicando por 36^2 a ambos miembros de la igualdad, y desarrollando las sumas cíclicas, la desigualdad se escribe de forma equivalente como

$$\left(5a^2 - 4bb' - 4cc'\right)^2 \geq \left(5a^2 - 4b^2 - 4c^2\right)\left(5a^2 - 4b'^2 - 4c'^2\right).$$

Si los triángulos son rectángulos en A, A' respectivamente, entonces $b = a\sin B$, $c = a\cos B$, $b' = a\sin B'$ y $c' = a\cos C'$, con lo que la desigualdad queda como

$$(5 - 4\cos(B - B'))^2 \geq 1.$$

Al ser $4\cos(B - B') \leq 4$, el miembro de la derecha es claramente mayor o igual que $1^2 = 1$, con igualdad si y sólo si $B = B'$, es decir, si y sólo si ABC y $A'B'C'$ son semejantes.

Supongamos ahora que los triángulos no son rectángulos en A, A', pero que mantenemos las condiciones $a \geq b \geq c$ y $a = a' \geq b' \geq c'$. Si $5a^2 \geq 4b^2 + 4c^2$ pero $5a^2 \leq 4b'^2 + 4c'^2$, o viceversa, el miembro de la derecha es no positivo, cumpliéndose claramente la desigualdad, con igualdad si y sólo si ambos miembros son nulos. El miembro de la derecha es nulo, sin pérdida de generalidad por simetría en el problema, si $5a^2 = 4b'^2 + 4c'^2$. Ha de ser además $5a^2 = 4bb' + 4cc'$ para que el término de la izquierda sea nulo. Se tiene entonces que $bb' + cc' = b'^2 + c'^2$, pudiendo tomar b y c a priori varios valores; por ejemplo, si $a = a' = 2$, $b' = c' = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, cualquier combinación con $b + c = \sqrt{10}$, siempre que $2 \geq b \geq c$, proporciona el resultado adecuado, es decir, cualquier combinación de la forma $b = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + \left(2 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)\rho$, $c = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} - \left(2 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)\rho$ para cualquier $\rho \in [0, 1]$.

Supongamos ahora que $5a^2 > 4b^2 + 4c^2, 4b'^2 + 4c'^2$. Escribimos la desigualdad a demostrar como inecuación de segundo grado en c':

$$(5a^2 - 4b^2)c'^2 - 2c(5a^2 - 4bb')c' + 5a^2(b' - b)^2 + (5a^2 - 4b'^2)c^2 \geq 0.$$

El discriminante de esta inecuación es

$$c^2(5a^2 - 4bb')^2 - 5a^2(b'-b)^2(5a^2 - 4b^2) - c^2(5a^2 - 4b^2)(5a^2 - 4b'^2) =$$
$$= -5[5a^2 - 4b^2 - 4c^2]a^2(b'-b)^2 \le 0,$$

con igualdad si y sólo si $b = b'$. Como para $c' = 0$ la inecuación claramente se cumple de forma estricta, pues $c > 0$ y $4b'^2 \le 4a^2$, y la ecuación correspondiente no puede tener raíces reales pues el discriminante es nulo, entonces la desigualdad siempre se cumple de forma estricta para cualquier valor de c' cuando $b \neq b'$. Otro tanto sucede si escribimos la desigualdad como inecuación cuadrática en c. Sin embargo, si $b = b'$, la desigualdad se escribe como $(c - c')^2 \ge 0$, que es claramente cierta, con igualdad si y sólo si $c = c'$. Se tiene entonces que si $5a^2 > 4b^2 + 4c^2, 4b'^2 + 4c'^2$, la desigualdad se cumple siempre, con igualdad si y sólo si los triángulos son semejantes.

Supongamos finalmente que $5a^2 < 4b^2 + 4c^2, 4b'^2 + 4c'^2$. Igual que en el caso anterior, podemos escribir la desigualdad como inecuación cuadrática en c o c', pero esta vez se tiene que la inecuación tiene soluciones reales, con lo que ya no se cumple siempre. Por ejemplo, si $a = a' = \frac{2\sqrt{3}b'}{3} = \frac{2\sqrt{3}c'}{3}$, se tiene que la desigualdad se convierte en

$$15a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 10\sqrt{3}ab - 10\sqrt{3}ac + 12bc \ge 0.$$

Si además $b = a$, se tiene que la desigualdad es equivalente a

$$4c^2 - (10\sqrt{3} - 12)ac + (19 - 10\sqrt{3})a^2 \ge 0.$$

Nótese por ejemplo que la desigualdad se cumple de forma estricta cuando $c = b = a$, y cuando $c \to 0$, al ser $10\sqrt{3} < \sqrt{361} = 19$, pero para $c = a\frac{5\sqrt{3}-6}{4}$, la desigualdad sería equivalente a

$$0 \le 4\frac{(5\sqrt{3}-6)^2}{16} - (10\sqrt{3}-12)\frac{5\sqrt{3}-6}{4} + (19-10\sqrt{3}) = (19-10\sqrt{3}) - \frac{(5\sqrt{3}-6)^2}{4} =$$
$$= \frac{5(4\sqrt{3}-7)}{4},$$

que es imposible al ser el último miembro negativo, por ser $4\sqrt{3} = \sqrt{48} < 7$, con lo que en este caso no se cumpliría la desigualdad, que de hecho no se cumpliría para todo c tal que

$$\frac{5\sqrt{3} - 6 - 2\sqrt{5}) + \sqrt{15}}{4} < c < a\frac{5\sqrt{3} - 6 + 2\sqrt{5} - \sqrt{15}}{4}.$$

Resumiendo, podemos decir que la desigualdad se cumple para todos aquellos pares de triángulos tales que no se cumple simultáneamente $5a^2 < 4b^2 + 4c^2$ y $5a'^2 < 4b'^2 + 4c'^2$, dándose la igualdad si y sólo si ambos triángulos son semejantes, o si $5aa' = 4bb' + 4cc'$, y además $5a^2 = 4b^2 + 4c^2$ o $5a'^2 = 4b'^2 + 4c'^2$. Para aquellos pares de triángulos tales que $5a^2 < 4b^2 + 4c^2$ y $5a'^2 < 4b'^2 + 4c'^2$, la desigualdad no tiene por qué darse, siendo relativamente compleja la condición que han de cumplir los triángulos para que se cumpla la desigualdad y para que se dé la igualdad.