Problema 179. Solución de Roberto Bosch Cabrera, Ciudad de la Habana, Cuba.

Debemos probar que:

$$\left[\frac{aa'}{4} - \frac{1}{9}(aa' + bb' + cc')\right]^2 \geq \left[\frac{a^2}{4} - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)\right]\left[\frac{a'^2}{4} - \frac{1}{9}(a'^2 + b'^2 + c'^2)\right]$$

Después de expandir y usar que $a^2 = b^2 + c^2$, $a'^2 = b'^2 + c'^2$ queda lo siguiente:

$$10(aa')^2 - 9(aa' + bb' + cc')aa' + 2(aa' + bb' + cc')^2 \geq 0$$

factorizemos

$$[2(aa' + bb' + cc') - 5aa']\,[(aa' + bb' + cc') - 2aa'] \geq 0 \tag{1}$$

Notar que

$$0 \leq (bc' - b'c)^2 \Leftrightarrow (bb' + cc')^2 \leq (b^2 + c^2)(b'^2 + c'^2) \Leftrightarrow bb' + cc' \leq aa'$$

De donde se deduce que $(aa' + bb' + cc') - 2aa' \leq 0$ y $2(aa' + bb' + cc') - 5aa' < 0$, o sea hemos probado la desigualdad (1). Se tiene igualdad si y solo si $bc' = b'c$.

La desigualdad original no se cumple para triángulos arbitrarios, basta considerar el siguiente ejemplo: $(a, b, c) = (4, 3, 2)$ y $(a', b', c') = (5, 4, 2)$.