Solución al Problema 24.2.

24.2 Un conjunto M de cuatro números naturales se dice *ligado*, si para todo elemento $x \in M$, al menos uno de los números $x - 1$ y $x + 1$ pertenece a M. Sea U_n el número de subconjuntos *ligados* del conjunto {1, 2, ..., n}.
a)Calcular U_7 .
b) Determinar el menor número n tal que $U_n \geq 2006$.

Por la definición de conjunto *ligado*, éste debe estar formado por dos pares de enteros del tipo (k,k+1), $k \in N$. Ahora, si tenemos el conjunto $S_n = \{1,2,3,....,n\}$, para formar todos los subconjuntos *ligados* de S_n, basta tomar de dos en dos pares del tipo (k,k+1); el número de ellos es $n - 1$; si los enumeramos, tenemos: (1,2),(2,3),(3,4),.....(n – 1, n). El número de los "pares de pares" es:

$$U_n = \binom{n-1}{2} = (n-1)!/[(n-3)!\ 2!] = (n-1)(n-2)/2. \qquad (*)$$

a) Con la fórmula (*) , tenemos: $U_7 = 6!/[4!2!] = 15$.
b) Haciendo $U_n = 2006$ y despejando n de la fórmula (*), obtenemos la ecuación cuadrática

$$n^2 - 3n - 4012 = 0,$$

cuya raíz positiva es

$$x = n = (3 + \sqrt{16049})/2.$$

Como $\sqrt{16049} \approx 126{,}7$ y U_n es una función creciente de n, aproximamos hacia arriba:

$$x = n = (3 + 127)/2 = 65.$$

Substituyendo en la fórmula (*), nos da: $U_n = 2016$. Se comprueba que, para $n = 64$, resulta $U_n < 2006$.