

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS 37

Cinco problemas de la Competición Matemática de Stanford (1946-1965)

37.1. En un tetraedro (no necesariamente regular), dos aristas opuestas tienen la misma longitud a y son mutuamente perpendiculares. Además, cada una de ellas es perpendicular al segmento, de longitud b , que une sus respectivos puntos medios. Expresar el volumen del tetraedro en función de a y b (1946,#2).

37.2. Diez personas están sentadas alrededor de una mesa redonda. Se quiere distribuir la cantidad de 10\$ entre ellas, de manera que cada una reciba la mitad de la suma de las cantidades que reciben las dos personas que tiene sentadas a su derecha y a su izquierda. ¿Hay una única forma de hacer el reparto? (1956,#4).

37.3. ¿Cuál es la edad del capitán, cuántos hijos tiene, y cuál es la longitud de su barco?. Se conoce el producto, 32118, de los tres números naturales buscados; la longitud de su barco se mide en pies (más de uno); el capitán tiene hijos e hijas; y tiene más años que el número total de sus hijos, pero no llega a tener 100 años. (1958,#1)

37.4. Sobre cada lado de un triángulo cualquiera se construye, exteriormente al triángulo, un cuadrado. Los 6 vértices de esos cuadrados que no son vértices del triángulo forman un hexágono. Tres de sus lados son, evidentemente, iguales a los lados correspondientes del triángulo. Demostrar que cada uno de los restantes tres lados del hexágono es igual al doble de una mediana del triángulo. (1959,#4)

37.5. (1961#4) Dados a, b, c resolver el sistema de tres ecuaciones en las incógnitas x, y, z :

$$x^2y^2 + x^2z^2 = axyz$$

$$y^2z^2 + y^2x^2 = bxyz$$

$$z^2x^2 + z^2y^2 = cxyz$$