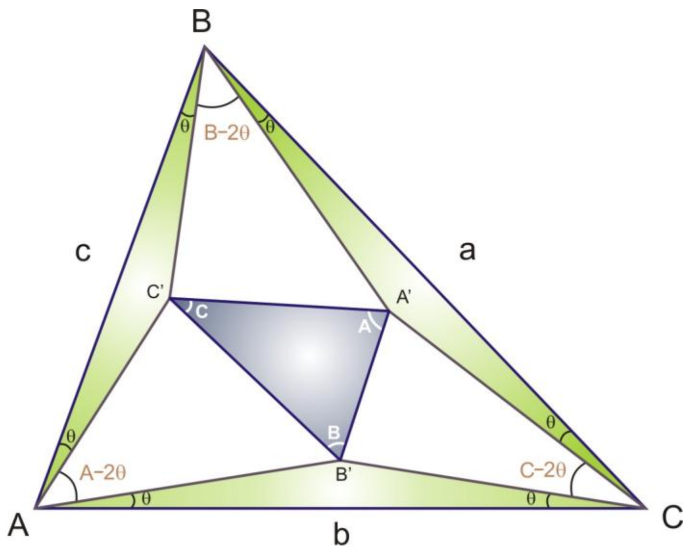
**Problema 11** (REVISTA N°3)

Sobre los lados de un triángulo ABC como bases se trazan, interiormente, tres triángulos isósceles, cuyos ángulos iguales miden $\theta$ radianes. Si el triángulo formado por los terceros vértices de esos tres triángulos es semejante al ABC, demostrar que

$$\tan\theta = \frac{\text{senAsenBsenC}}{1+\cos A\cos B\cos C}$$

**RESOLUCIÓN**




**i. En el triángulo ABC:**

$$\begin{cases} AC' = BC' = \dfrac{1}{2}c.\sec\theta \\ BA' = CA' = \dfrac{1}{2}a.\sec\theta \\ AB' = CB' = \dfrac{1}{2}b.\sec\theta \end{cases}$$

**ii. En el triángulo $AC'B'$ (Teorema de cosenos)**

$$B'C'^{\,2} = AC'^{\,2} + AB'^{\,2} - 2AC'.AB'.\cos(A-2\theta)$$

$$\Rightarrow B'C'^{\,2} = \frac{1}{4}\sec^2\theta\ \ c^2 + b^2 - 2c.b.\cos(A-2\theta)$$

$$\text{tambien}: \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

$$\Rightarrow B'C'^{\,2} = \frac{1}{4}\sec^2\theta.(a^2 + \underbrace{2bc.\cos A - 2cb.\cos(A-2\theta)}_{2bc\ \ \cos A - \cos(A-2\theta)})$$

$$\therefore B'C'^{\,2} = \frac{1}{4}\sec^2\theta\ \ a^2 - 4bc.\text{sen}(A-\theta).\text{sen}\theta$$

**Análogo para los demás lados.**

$$\therefore \begin{cases} A'B'\ ^{2} = \dfrac{1}{4}\sec^2\theta\ \ c^2 - 4ab.\text{sen}(C-\theta).\text{sen}\theta \\[2ex] C'A'\ ^{2} = \dfrac{1}{4}\sec^2\theta\ \ b^2 - 4ca.\text{sen}(B-\theta).\text{sen}\theta \end{cases}$$

**iii.** **En el triángulo** $A'B'C'$ **(teorema de senos)**

$$\frac{B'C'}{\text{sen}A} = \frac{A'B'}{\text{sen}C} \Rightarrow \left(\frac{\text{sen}C}{\text{sen}A}\right)^2 = \left(\frac{A'B'}{B'C'}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2}$$

Reemplazando y efectuando:

$$\Rightarrow \left(\frac{\text{sen}C}{\text{sen}A}\right)^2 = \frac{\dfrac{1}{4}\sec^2\theta\ \ c^2 - 4ab.\text{sen}(C-\theta).\text{sen}\theta}{\dfrac{1}{4}\sec^2\theta\ \ a^2 - 4bc.\text{sen}(A-\theta).\text{sen}\theta} = \frac{c^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\text{sen}C}{\text{sen}A}\right)^2 = \frac{c^2 - 4ab.\text{sen}(C-\theta).\text{sen}\theta\ \ - c^2}{a^2 - 4bc.\text{sen}(A-\theta).\text{sen}\theta\ \ - a^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\text{sen}C}{\text{sen}A}\right)^2 = \frac{a.\text{sen}(C-\theta)}{c.\text{sen}(A-\theta)} = \frac{\dfrac{\text{sen}(C-\theta)}{\text{sen}C.\text{sen}\theta}}{\dfrac{\text{ssen}(A-\theta)}{\text{sen}A.\text{sen}\theta}} = \frac{\cot\theta - \cot C}{\cot\theta - \cot A}$$

Por propiedad de proporciones y aplicando identidades:

$$\Rightarrow \frac{\cot\theta - \cot C}{\underbrace{\cot C - \cot A}_{\frac{\text{sen}(A-C)}{\text{sen}A.\text{sen}C}}} = \frac{\text{sen}^2 C}{\underbrace{\text{sen}^2 A - \text{sen}^2 C}_{\text{sen}(A+C).\text{sen}(A-C)}}$$

$$\Rightarrow \cot\theta - \cot C = \frac{\text{sen}C}{\underbrace{\text{sen}(A+C)}_{\text{sen}B}.\text{sen}A}$$

$$\Rightarrow \cot\theta = \frac{\overbrace{\text{sen}^2 C}^{1-\cos^2 C} + \text{sen}B\text{sen}A\cos C}{\text{sen}B.\text{sen}A\text{sen}C}$$

$$\Rightarrow \cot\theta = \frac{1-\cos C\ \ \cos C - \text{sen}B\text{sen}A}{\text{sen}B.\text{sen}A\text{sen}C}$$

$$\Rightarrow \cot\theta = \frac{1-\cos C\left(\cos(A+B) - \text{sen}B\text{sen}A\right)}{\text{sen}B.\text{sen}A\text{sen}C}$$

$$\Rightarrow \cot\theta = \frac{1-\cos C\cos A\cos B}{\text{sen}B.\text{sen}A\text{sen}C}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\text{sen}B.\text{sen}A\text{sen}C}{1-\cos C\cos A\cos B} \qquad \text{l.q.q.d.}$$