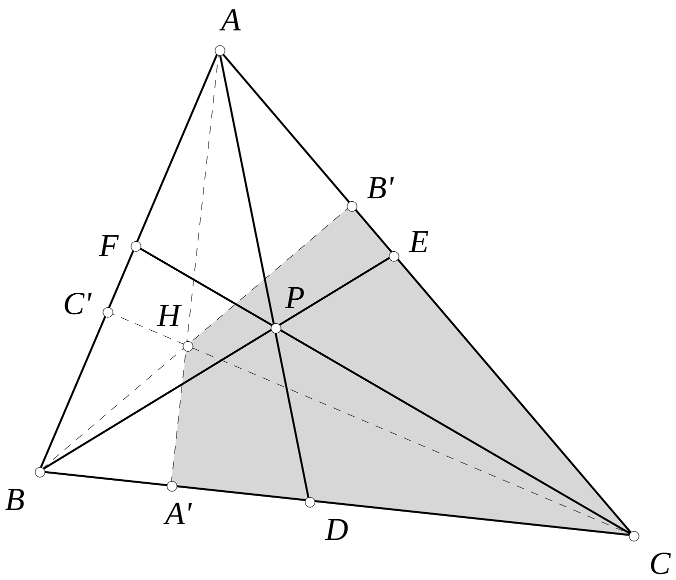
Problema 176, propuesto por Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona (España)

Dado un triángulo no degenerado *ABC*, y un punto *P* en su interior, trazamos las cevianas *AD*, *BE*, *CF* que pasan por *P*. Determinar todos los triángulos *ABC* y todos los puntos *P* en su interior para los que se cumple que al menos dos de las circunferencias circunscritas a *AEF*, *BFD* y *CDE* pasan por *P*.

Solución.



En primer lugar la condición "al menos dos circunferencias circunscritas pasan por *P*" implica que las tres circunferencias pasan por *P*.

En efecto, supongamos que las circunferencias circunscritas a *AEF* y *BFD* pasan por *P*, entonces los cuadriláteros *AEPF* y *BFPD* son inscriptibles , tenemos

$$\left.\begin{array}{l}\angle FPE = 180^{\circ} - A \\ \angle FPD = 180^{\circ} - B\end{array}\right\} \Rightarrow \angle DPE = 360^{\circ} - \left(\angle FPE + \angle FPD\right) = A + B = 180^{\circ} - C$$

y la circunferencia circunscrita a *CDE* pasa por *P*.

Si trazamos las tres alturas *AA*', *BB*' y *CC*' que se cortan en *H*, el triángulo queda descompuesto en tres cuadriláteros *AC'HB'*, *BA'HC'* y *CB'HA'*.

Supongamos que *P* está en el interior del cuadrilátero *CB'HA'*, entonces los ángulos $\angle PEC$ y $\angle PDC$ son obtusos y el cuadrilátero *CEPD* no puede ser inscriptible; luego *P* no puede estar en el interior del cuadrilátero *CB'HA'*. Por el mismo motivo no puede estar en el interior de los cuadriláteros *AC'HB*', *BA'HC'*.

Finalmente si *P* está en alguna de las alturas, por ejemplo en el segmento *BB*' entonces $\angle PEC = 90^{\circ}$ y el ángulo opuesto $\angle PDC$ también debe ser recto, es decir *P* debe estar sobre la altura *AA*' y por tanto debe coincidir con *H*.

Como *P* ha de estar en el interior del triángulo la respuesta es todos los triángulos acutángulos y para cada uno *P* el ortocentro.