PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES 37

Cinco problemas de un campamento matemático de verano 2009 en Darmanesti (Rumania)

J37.1: Si la suma de la longitud y la anchura de un rectángulo es 2, demostrar que el perímetro de este rectángulo es cuadrado perfecto.

J37.2: Sea A = $10^{n+2} + 10^{n} - a$, donde *n* es un número natural y *a* es un dígito. Determinar *a* sabiendo que A es divisible por 3.

J37.3: La mediana AM (M pertenece al lado BC) en el triángulo acutángulo ABC corta por segunda vez a la circunferencia circunscrita al triángulo en D (la primera vez es en A). Si E es el simétrico de A con respecto a M, demostrar que BC es la tangente común a los círculos circunscritos a los triángulos BDE y CDE.

J37.4: Calcular el resto de la división del número

$$A = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2007 + 2008$$

por 2002.

J37.5: Se considera el número

$$a = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{100^2} .$$

Demostrar que

$$0,2 < \sqrt{\frac{a}{11}} < 0,3 .$$