PROBLEMA 177

Sea $P(n, \sin(nx))$ el siguiente polinomio:

$$P(n, \sin(nx)) = -\binom{n}{0}(\sin x)^2 + \binom{n}{1}\frac{(\sin x)^4}{2} - \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}\frac{(\sin x)^{2n+2}}{n+1}$$

Calcular el límite cuando n tiende a infinito de ese polinomio.

SOLUCION:

Escribiendo $P(n, \sin(nx)) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\frac{(\sin x)^{2i+2}}{i+1}$

Como $\frac{(\sin x)^{2i+2}}{i+1} = \frac{[(senx)^2]^{i+1}}{i+1} = \left[\frac{z^{i+1}}{i+1}\right]_0^{(senx)^2} = \int_0^{(senx)^2} z^i\, dz$

Podemos reescribir el polinomio como y usando el binomio de Newton se obtiene

$$\begin{aligned}
P(n, \sin(nx)) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\int_0^{(senx)^2} z^i\, dz = \int_0^{(senx)^2}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i} z^i\, dz \\
&= -\int_0^{(senx)^2}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i} z^i\, dz = -\int_0^{(senx)^2}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(1)^{n-i}(-z)^i\, dz \\
&= -\int_0^{(senx)^2}(1-z)^n\, dz = -\left[-\frac{(1-z)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{(senx)^2} \\
&= \frac{(1-(senx)^2)^{n+1}}{n+1} - \frac{(1-0)^{n+1}}{n+1} = \frac{((cosx)^2)^{n+1}}{n+1} - \frac{1^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{(cosx)^{2n+2}-1}{n+1}
\end{aligned}$$

Si $cosx = \pm 1$ se tiene que $P(n, \sin(nx)) = 0$

Si $(cosx)^2 < 1\ entonces,$ cuando $n \to \infty$ se tiene que $P(n, \sin(nx)) \to 0$

Por tanto $\lim_{n\to\infty} P(n, \sin(nx)) = 0$