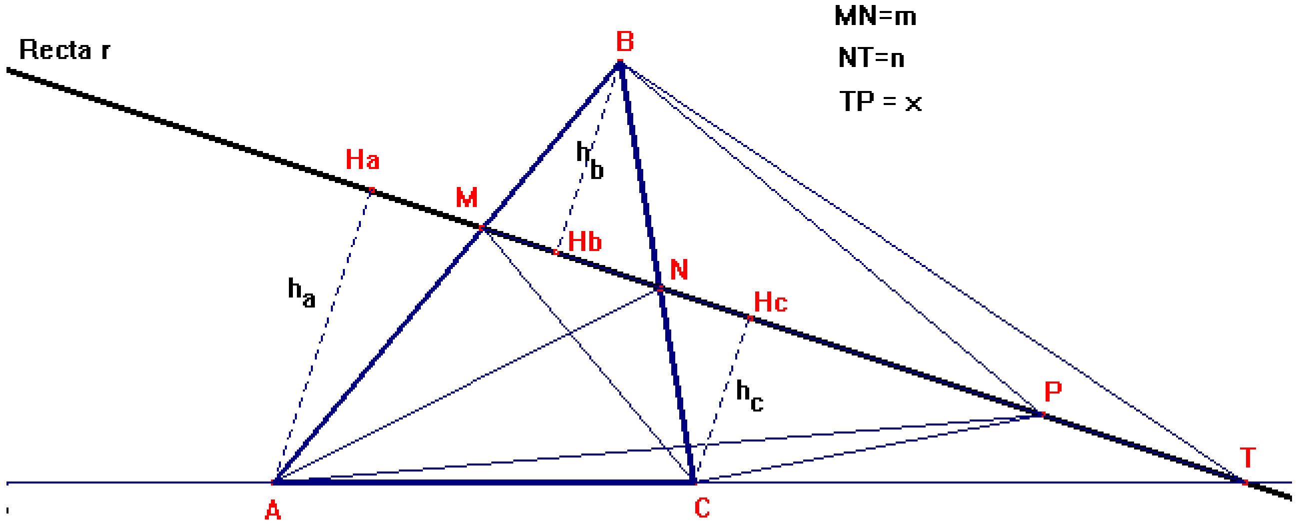
Revista Escolar de la OIM

Problema 14.-

Sea ABC un triángulo y r una recta que corta a AB en M a BC en N y a la prolongación de AC en T.
Demostrar que existe un punto P en r tal que las áreas de los triángulos PAN,PBT, y PCM coinciden.

Sol.:



Sea P el punto que verifica la propiedad solicitada en el problema y designemos por x = TP . Nuestro propósito será, pues, determinar el valor de x.

Dada la situación enunciada y reflejada en el dibujo, trazamos los segmentos comprendidos entre los puntos M, N y T y los pies de las perpendiculares a la recta r desde los puntos vértices del triángulo inicial A, B y C. Así obtenemos las parejas de triángulos rectángulos semejantes siguientes:

H_cNC y NH_bB

H_bMB y MH_aA

H_aTA y TH_cC

De estas semejanzas obtenemos las siguientes proporciones entre los segmentos h_a , h_b y h_c .

$$\frac{h_c}{h_b}=\frac{H_cN}{NH_b};\ \frac{h_b}{h_a}=\frac{H_bM}{MH_a};\ \frac{h_a}{h_c}=\frac{TH_a}{TH_c}$$

Esto es,

$$\frac{h_c}{h_b}\frac{h_b}{h_a}\frac{h_a}{h_c}=1=\frac{H_cN}{NH_b}\frac{H_bM}{MH_a}\frac{TH_a}{TH_c};$$

$H_cN*H_bM*TH_a = NH_b*MH_a*TH_c$ (1)

Relación esta última que va a tener al final una importancia definitiva.

Por otro lado si P es el punto a construir se ha de verificar la igualdad de áreas (S) en los triángulos PAN, PBT y PCM.

Esto quiere decir que: S(PAN)= S(PBT)= S(PCM)
$S(PAN) = 1/2\cdot h_a\cdot PN = 1/2\cdot h_a\cdot(TN - x)= 1/2\cdot h_a\cdot(TH_c+H_cN - x)$
$S(PBT) = 1/2\cdot h_b\cdot PT = 1/2\cdot h_b\cdot x$
$S(PCM) = 1/2\cdot h_c\cdot PM = 1/2\cdot h_c\cdot(TM- x) =1/2\cdot h_c\cdot(TH_c + H_cN + NH_b + H_bM - x)$

Luego de la igualdad de áreas se tendrá que:

$h_a\cdot(TH_c+H_cN - x) = h_b\cdot x = h_c\cdot(TH_c + H_cN + NH_b + H_bM - x)$

De estas relaciones podemos despejar el valor de x:

$$x = \frac{h_a.(TH_c + H_cN)}{h_a + h_b} = \frac{h_a.TN}{h_a + h_b} = \frac{h_a.n}{h_a + h_b}$$
$$x = \frac{h_c.(TH_c + H_cN + NH_b + H_bM)}{h_b + h_c} = \frac{h_c.(TN + NM)}{h_b + h_c} = \frac{h_c.(n + m)}{h_b + h_c}$$

Para que el aserto del problema sea cierto han de ser idénticas ambas expresiones de x. Y eso es lo que vamos a probar. Para ello usemos las expresiones primeras de ambas.

$$x = \frac{h_a.(TH_c + H_cN)}{h_a + h_b} = \frac{h_c.(TH_c + H_cN + NH_b + H_bM)}{h_b + h_c}$$

Para ello, tengamos en cuenta las relaciones antes dadas con las alturas h_a , h_b y h_c.

$$\frac{(TH_c + H_cN)}{1 + \frac{h_b}{h_a}} = \frac{(TH_c + H_cN + NH_b + H_bM)}{\frac{h_b}{h_c} + 1}$$

$$\frac{h_c}{h_b} = \frac{H_cN}{NH_b};\ \frac{h_b}{h_a} = \frac{H_bM}{MH_a};\ \frac{h_a}{h_c} = \frac{TH_a}{TH_c} \qquad \frac{(TH_c + H_cN)}{1 + \frac{H_bM}{MH_a}} = \frac{(TH_c + H_cN + NH_b + H_bM)}{\frac{NH_b}{H_cN} + 1}$$

Multiplicando y simplificando los términos equivalentes en esta igualdad obtenemos:

$$(TH_c + H_cN)\cdot(\frac{NH_b}{H_cN} + 1) = (1 + \frac{H_bM}{MH_a})\cdot(TH_c + H_cN + NH_b + H_bM)$$

$$(TH_c + H_cN) * (NH_b + H_cN) * MH_a = H_cN * (MH_a + H_bM) * (TH_c + H_cN + NH_b + H_bM)$$

$\mathbf{TH_c*NH_b*MH_a} + TH_c*H_cN*MH_a + H_cN*NH_b*MH_a + H_cN*H_cN*MH_a =$
$= H_cN*MH_a*TH_c + H_cN*MH_a*H_cN + H_cN*MH_a*NH_b + H_cN*MH_a*H_bM + H_cN*H_bM*TH_c +$
$+ H_cN*H_bM*H_cN + H_cN*H_bM*NH_b + H_cN*H_bM*H_bM$;

$\mathbf{TH_c*NH_b*MH_a} + \cancel{TH_c*H_cN*MH_a} + \cancel{H_cN*NH_b*MH_a} + \cancel{H_cN*H_cN*MH_a} =$
$= \cancel{H_cN*MH_a*TH_c} + \cancel{H_cN*MH_a*H_cN} + \cancel{H_cN*MH_a*NH_b} + H_cN*MH_a*H_bM + H_cN*H_bM*TH_c +$
$+ H_cN*H_bM*H_cN + H_cN*H_bM*NH_b + H_cN*H_bM*H_bM$;

$\mathbf{TH_c*NH_b*MH_a} = H_cN*H_bM* (MH_a + TH_c + H_cN + NH_b + H_bM) = H_cN*H_bM* (TH_c + H_cN + NH_b +$
$+H_bM +MH_a) = \mathbf{H_cN*H_bM*TH_a}$

$\mathbf{TH_c*NH_b*MH_a = H_cN*H_bM*TH_a}$

identidad esta última igual a la relación dada por (1) que ya habíamos visto anteriormente y que se verificaba de un modo natural a partir de la semejanza de triángulos. (= base del Teorema de Menelao).

En definitiva, sí es cierto que se verifica la igualdad en las dos expresiones de x.

Por tanto, $x = \frac{h_a . n}{h_a + h_b} = \frac{h_c .(m+n)}{h_b + h_c}$, cuya construcción se sigue de la misma proporción dada.

Saludos.

F. Damián Aranda Ballesteros.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI