DEMOSTRACIÓN DE DOS IDENTIDADES MEDIANTE COMBINATORIA Y PROBABILIDAD

LAURENȚIU MODAN

Department of Mathematics, Faculty of Computer Science
Academy of Economic Studies, Bucharest
E-mail: modanl@inforec.ase.ro

Abstract. We expose a ***Probabilistic method***, based on the ***hypergeometric scheme***, proving two very usual Combinatorics identities.

MR classification: 05A05, 60A99.

El propósito de esta Nota es presentar demostraciones inusuales de dos identidades bien conocidas :

$$\sum_{k=0}^{n} C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^n, a, b, n \in \boldsymbol{N}, a \geq k, b \geq n-k, a+b \geq n \qquad (1),$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n, n \in \boldsymbol{N}, n \geq k \qquad (2).$$

La demostración clásica de (1) se basa en la relación:

$$(1+x)^a (1+x)^b = (1+x)^{a+b}, a, b \in \boldsymbol{N} \qquad (3),$$

de donde se calcula el coeficiente de x^n de dos maneras. Igualmente, la demostración clásica de(2), utiliza (3), haciendo $a = b = n$ y calculando de dos manerasel coeficiente de x^n.

El ***Método Probabilístico*** anunciado para probar (1) y (2) tiene como punto de partida el ***esquema hipergeométrico*** (ver [1]), que presentamos a continuación.

Consideremos una urna con a bolas blancas y b bolas negras. Simultáneamente extraemos n bolas, $n \leq a+b$, y de ellas queremos tener α blancas y β negras, con $\alpha + \beta = n$. Por lo tanto, la probabilidad del anterior suceso es:

$$P = \frac{C_a^\alpha C_b^\beta}{C_{a+b}^{\alpha+\beta}} \qquad (4).$$

Ahora probaremos (1) . Supongamos la misma urna, con a bolas blancas y b bolas negras. Sacamos n de esas $a+b$ bolas, con $n \leq a+b$. Calcularemos la probabilidad de que a lo sumo $n-1$ bolas, de las n, sean blancas. Pero esto significa que tenemos un suceso A, que consiste en tener 0, o 1, o 2, ..., o $n-1$ bolas blancas, de las n, ya extraídas. Por tanto, con el ***esquema hipergeométrico*** se verifica:

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} \qquad (5).$$

Obsérvese que el suceso contrario a A es $\overline{A}$, que se expresa como:

„ las n bolas extraídas son blancas”,

y así, la probabilidad $P(A)$ puede calcularse mediante:

$$P(A) = 1 - \frac{C_a^n C_b^0}{C_{a+b}^n} \qquad (6).$$

De (5) y (6), se obtiene inmediatamente (1).

Una generalización de (1), surge directamente:

$$\sum_{0=k_1\neq k_2\neq\ldots\neq k_n=n} C_{a_1}^{k_1} C_{a_2}^{k_2} \ldots C_{a_n}^{n-(k_1+\ldots+k_n)} = C_{a_1+\ldots+a_n}^{n} \qquad (7),$$

con $a_i, k_i, n \in \boldsymbol{N}, a_i \geq k_i (\forall) i \in \{1,\ldots,n\}, a_1 + \ldots + a_n \geq n.$

Procedamos a la segunda demostración de (2). Esta vez consideraremos una urna con n bolas blancas y n bolas negras. Simultáneamente sacamos n bolas. Consideremos los sucesos A_k, consistentes en la aparición de k bolas blancas y $n-k$ bolas negras con $k \in \{0,\ldots,n\}$. Tenemos las probabilidades:

$$P(A_k) = \frac{C_n^k C_n^{n-k}}{C_{2n}^n} = \frac{\left(C_n^k\right)^2}{C_{2n}^n}, (\forall) k \in \{0,\ldots,n\} \qquad (8),$$

usando la relación combinatoria:

$C_n^k = C_n^{n-k}, (\forall) k \in \{0,\ldots,n\}$.

Como $A_1,\ldots,A_n$ es un sistema completo de sucesos (ver [2]), :

i) $A_i \bigcap A_j = \emptyset, (\forall) i \neq j \in \{1,\ldots,n\}$;

ii) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, donde Ω es el espacio total, o ***suceso seguro,***.

resulta:

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1,$$

o lo que es equivalen (8):

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(C_n^k\right)^2}{C_{2n}^n} = 1,$$

de donde:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n .$$

Esto prueba (2) .

REFERENCIAS

[**1**] **Modan L.** *„Sur un problème de numération" (to oppear), St. Bull., Baia Mare Univ., 2002;*

[**2**] **Neveu J.** *„Bases mathématiques du calcul des probabilités", Masson, Paris, 1964.*

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI