Problema 21. Solución de Roberto Bosch Cabrera, Florida, USA.

En general se cumple que

$$\begin{aligned}(xy+yz+zx)^2 &= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)\\ (x+y+z)^2 &= x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\end{aligned}$$

Multiplicando por 2 la segunda ecuación del sistema original obtenemos

$$2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) = 2xyz(x+y+z)^3 = [(xy+yz+zx)^2-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2][x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)]$$

Denotemos

$$\begin{aligned}x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 &= a\\ xy+yz+zx &= b\end{aligned}$$

Entonces se cumple que

$$2a = (b^2-a)(\frac{1}{3}+2b)$$

Despejando a queda

$$a = \frac{6b^3+b^2}{6b+7}$$

Pero notar que

$$(xy+yz+zx)^2 = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z) \leq 3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$

de donde se deduce que $b^2 \leq 3a$, es decir $a \geq \frac{b^2}{3}$. Sustituyendo

$$\frac{6b^3+b^2}{6b+7} \geq \frac{b^2}{3}$$

pero $\frac{1}{3}+2b = (x+y+z)^2 \geq 0 \Rightarrow 6b+1 \geq 0 \Rightarrow 6b+7 > 0$, de donde obtenemos $18b^3 + 3b^2 \geq 6b^3+7b^2 \Rightarrow 4b^2(3b-1) \geq 0$ entonces si $b \neq 0$ se tiene que $b \geq \frac{1}{3}$. Lo cual implica que $xy+yz+zx \geq x^2+y^2+z^2$ pero es bien conocido que $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$, de donde $x^2+y^2+z^2 = xy+yz+zx$ y por tanto $x=y=z$. Sustituyendo en la primera ecuación del sistema obtenemos las soluciones $(x,y,z) = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ y $(x,y,z) = (-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$. Notar que $b=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow xy=0, yz=0, zx=0$, de donde al menos dos variables son 0 y sustituyendo quedan las soluciones $(x,y,z) = (0,0,\pm\frac{\sqrt{3}}{3}), (x,y,z) = (0,\pm\frac{\sqrt{3}}{3},0), (x,y,z) = (\pm\frac{\sqrt{3}}{3},0,0)$.