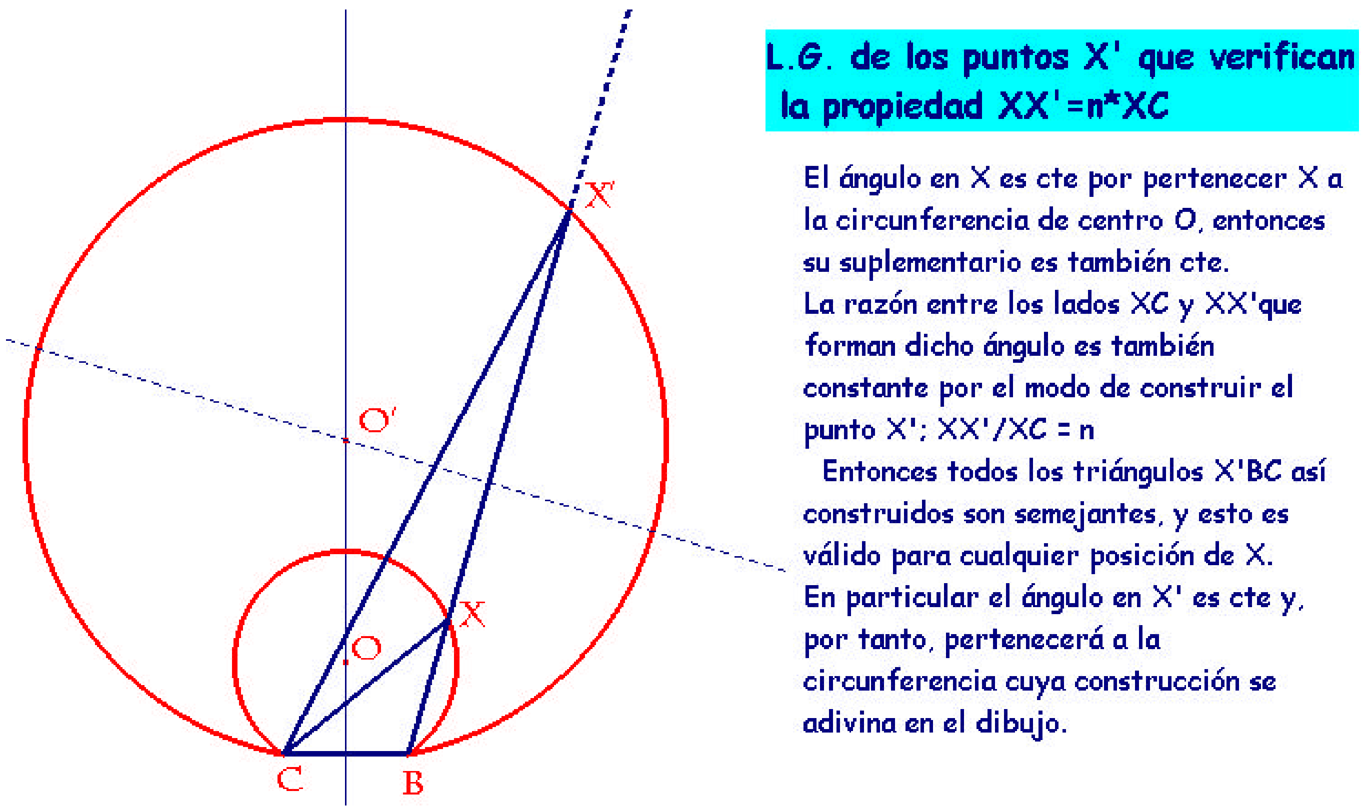
Problema 6

Construir un triángulo, conociendo Â, a, b + 3c.
(1941)

Lema Sean dadas una circunferencia y una cuerda BC de la misma. Sea X (X≠B, X≠C) un punto situado sobre la circunferencia en uno de los dos semiplanos que determina la cuerda dada.
Si sobre la semirrecta BX y, a partir del punto X, trasladamos el segmento n·XC (= n es un número dado) determinamos así el punto X'.

El lugar geométrico de los puntos X' es otro arco-capaz de la cuerda BC situado en el mismo semiplano que el primer arco-capaz.

Sol:



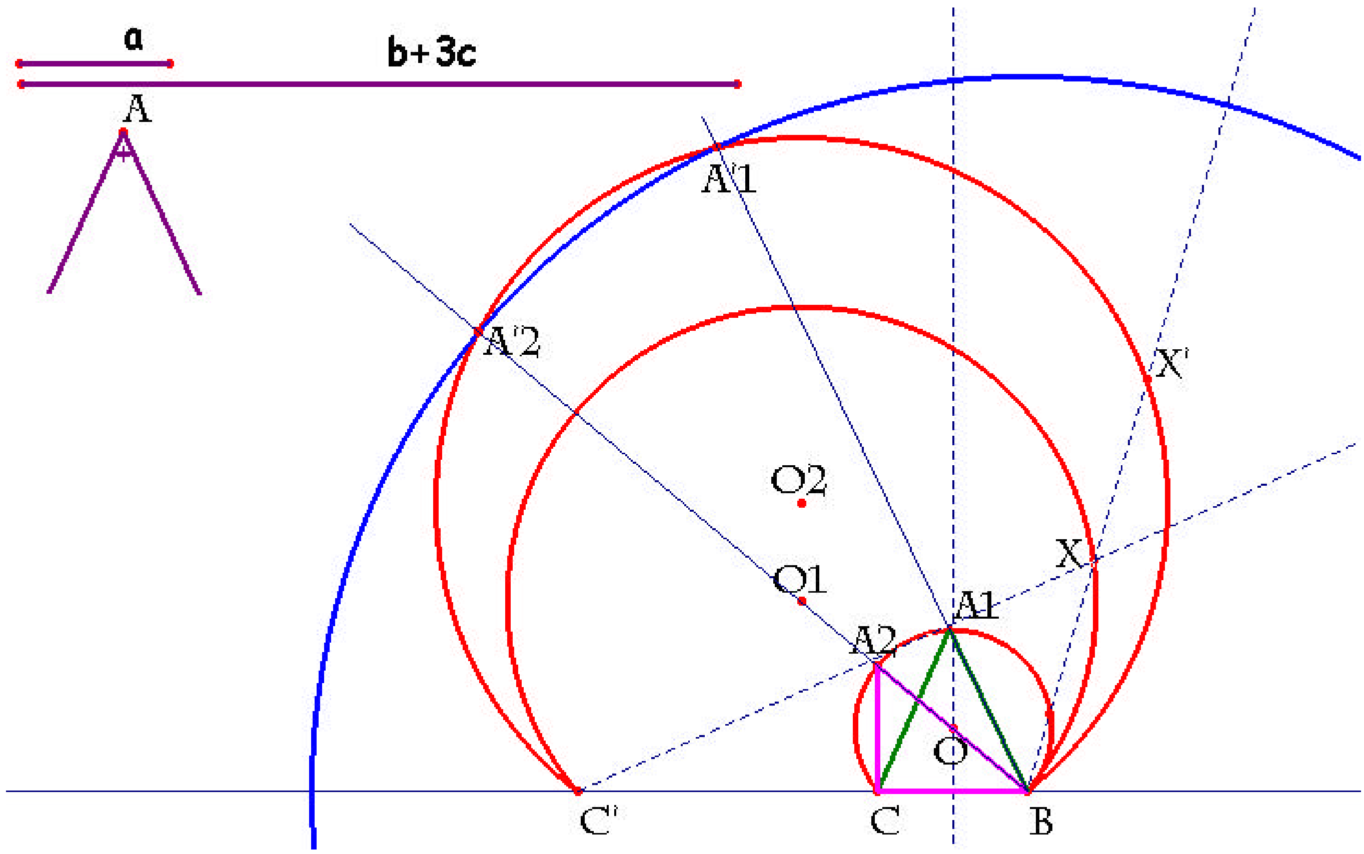
Construir un triángulo, conociendo Â, a, b + 3c.
Basándonos en el anterior lema vamos a construir el triángulo solicitado. Para ello, en primer lugar, construimos el arco-capaz del segmento **a** y ángulo **Â** dados. Sobre este segmento de extremos BC construimos seguidamente la imagen nomotética de este arco-capaz respecto del punto B y de valor k=3. Para ello bastará construir el centro, O_1, de la nueva circunferencia, imagen del centro O de la primera. Esto significará que $BO_1 = 3 \cdot BO$ y de este modo obtenemos el arco-capaz del segmento BC' ($BC' = 3 \cdot BC$) y de ángulo Â.

Sea X cualquier punto situado en este segundo arco-capaz y, sobre la semirrecta BX a partir del punto X, trasladamos el segmento $1/3 \cdot XC'$ determinando así el punto X'. Sabemos entonces que, por el lema anterior, el lugar geométrico de los puntos X' será otro arco-capaz de la cuerda BC'. Observemos que, en este caso concreto n=1/3. Llamemos O_2 al centro de esta nueva circunferencia.

Resulta pues que, para cualquier punto A situado en la primera circunferencia tenemos un único punto X' situado en la última circunferencia tal que $X'B = AC + 3 \cdot BC$.

Por tanto si ahora trazamos la circunferencia de centro B y cuyo radio es la longitud del segmento dado **b + 3·c** obtendremos 2, 1 o 0 puntos de corte con la circunferencia última de centro O_2. Estos puntos de corte determinarán sobre la primera circunferencia 2, 1 o 0 soluciones a nuestro problema.

En el dibujo se observan dos soluciones al caso planteado. Son los triángulos A_1BC y A_2BC.



Posdata:
Este problema admite una generalización muy sencilla del siguiente modo:
Construir un triángulo, conociendo Â, a y $m \cdot b + n \cdot c$, donde m y n son números reales dados.

Saludos de F. Damián Aranda Ballesteros.
Profesor de Matemáticas del IES Blas Infante en Córdoba (España)

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI