**PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS (5)**

Presentamos una selección de problemas de las Olimpiadas de Eslovenia y de la República Checa y de la Eslovaca, de 2002.

**Problema 5.1** (*Chequia y Eslovaquia*)

Demostrar que para cualesquiera números $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ se verifica la desigualdad

$$\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} \geq 2\sqrt{\tan\alpha + \tan\beta}.$$

¿Cuándo se verifica la igualdad?

**Problema 5.2** (*Chequia y Eslovaquia*)

Se da una circunferencia $k$ y un cuadrilátero ABCD inscrito en ella de manera que su diagonal BD no es un diámetro. Demostrar que el punto de intersección de las tangentes a $k$ en los puntos B y D pertenece a la recta AC si, y sólo si,

$$|AB| \bullet |CD| = |AD| \bullet |BC|$$

**Problema 5.3** (*Chequia y Eslovaquia*)

Resolver en el conjunto de los números reales el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 - 1 = p(y+z) \\ y^2 - 1 = p(z+x) \\ z^2 - 1 = p(x+y) \end{cases}$$

Discutir el número de soluciones.

**Problema 5.4** (*Chequia y Eslovaquia*)

Hallar todos los pares de números reales $a, b$ para los cuales la ecuación (con $x$ real)

$$\frac{ax^2 - 24x + b}{x^2 - 1} = x$$

tiene dos soluciones cuya suma es 12.

**Problema 5.5** (*Eslovenia*)

¿Existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$f(f(2002)) = 17, \quad f(mn) = f(m)f(n) \quad \text{y} \quad f(n) \leq n$$

para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$?

**Problema 5.6** (*Eslovenia*)

En el sótano de un castillo 7 gnomos guardan un tesoro. El tesoro está detrás de 10 puertas y cada puerta tiene 3 cerraduras. Todas las cerraduras son diferentes. Cada gnomo tiene llaves de algunas cerraduras. Cualquier grupo de 4 gnomos tiene llaves de todas las cerraduras. Probar que hay un grupo de tres gnomos que tiene llaves de todas las cerraduras.

**Problema 5.7** (*Eslovenia*)

Sea $S = \{a_1, \cdots, a_n\}$, donde los $a_i$ son enteros positivos distintos. La suma de todos los números de cualquier subconjunto propio del conjunto $S$ no es divisible por $n$. Demostrar que la suma de todos los números de $S$ es divisible por $n$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI