Problema 17

Sean (x_n) e (y_n) las sucesiones definidas recurrentemente por:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}, \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_n = x_n + 2^{n-1} \end{cases}, \ \forall n \geq 2 .$$

i) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$

ii) Probar que hay términos de las dos sucesiones que son divisibles por tres números primos consecutivos.

iii) Si $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son numeros primos, demostrar que hay un número infinito de términos en (x_n) o en (y_n) que son divisibles por el producto $p_1 p_2 \ldots p_k$.

Normalmente, estos problemas se pueden resolver sin dar una expresión explícita de (x_n) o (y_n). Sin embargo, es bastante trivial en este caso encontrar que:

$$x_{n+1} = x_n + y_n = 2x_n + 2^{n-1} .$$

Podemos entonces buscar soluciones de la forma:

$$x_n = 2^{n-2} z_n ,$$

siendo (z_n) una sucesión de números reales a encontrar. Es obvio que:

$$2^{n-1} z_{n+1} = x_{n+1} = 2x_n + 2^{n-1} = 2^{n-1} z_n + 2^{n-1} ,$$

de donde se establece que $z_{n+1}=z_n+1$. Al mismo tiempo, $x_2=z_2=x_1+y_1=3$, luego $z_n=n+1$ es válido para $n=2$, y si es válido para n, entonces para $n+1$ se tiene que $z_{n+1}=z_n+1=(n+1)+1$. Luego por inducción hemos probado que, para todo $n\geq 2$, $z_n=n+1$, y se tiene:

$$x_n = 2^{n-2}(n+1) .$$

Por lo tanto, se tiene también, para todo $n\geq 2$, que:

$$y_n = x_n + 2^{n-1} = 2^{n-2}(n+1) + 2^{n-1} = 2^{n-2}(n+3) .$$

i) El límite pedido es obviamente 1, ya que $x_n/y_n=(n+1)/(n+3)$.

ii y iii) Dado cualquier número entero positivo m, se tiene que $x_{m-1}, x_{2m-1}, x_{3m-1}, \ldots$ son divisibles por m, como también lo son $y_{m-3}, y_{2m-3}, y_{3m-3}, \ldots$. Esto es cierto también para los casos particulares donde m es el producto de tres primos consecutivos, o el producto de k primos cualesquiera.