

Problema 19

Hallar el mínimo valor de la expresión

$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(y - x)^2 + 1} + \sqrt{(z - y)^2 + 1} + \sqrt{(10 - z)^2 + 9}$$

donde x, y, z son números reales arbitrarios.

Sean los puntos de coordenadas:

$$O \equiv (0, 0), \quad A \equiv (x, 1), \quad B \equiv (y, 2), \quad C \equiv (z, 3), \quad D \equiv (10, 6).$$

Obviamente, la expresión de la que se pide hallar el mínimo es equivalente a la suma de las distancias $OA + AB + BC + CD$. Este valor es mínimo cuando los puntos O, A, B, C, D están alineados, con C en el segmento OD , B en el segmento OC y A en el segmento OB . Esto es posible cuando $x = 5/3, y = 10/3, z = 5$. El valor a minimizar es entonces igual a la distancia OD , es decir:

$$\sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}.$$